



Problemas Seleccionados
de Matemática

IME-ITA-Olimpíadas

Volume 1

Marcilio Miranda

Apresentação

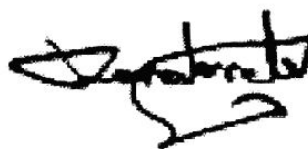
A Editora VestSeller tem o prazer de lançar mais uma obra prima da Matemática para o segmento de preparação para escolas militares e Olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais: a presente obra Problemas Seleccionados de Matemática – IME ITA e Olimpíadas, do professor Marcílio Miranda.

Esse livro apresenta uma ampla gama de problemas de níveis intermediário e avançado das mais variadas olimpíadas de Matemática de todo o mundo, assim como problemas propostos para treinamento, todos eles integralmente resolvidos ao final do livro, tendo alguns deles, mais de uma solução.

Os estudantes que se preparam para IME ITA e Olimpíadas têm, nesse livro, uma ferramenta poderosa que permite ao leitor obter um grande salto de conhecimento num curto intervalo de tempo.

O autor, Marcílio Miranda, ex aluno e atual professor do Colégio Dom Barreto (Teresina – PI), seleccionou e reuniu um conjunto de problemas muito interessantes e variados, em especial aqueles relativos a números inteiros, equações com números inteiros, congruência linear. Conta adicionalmente com muitas questões de álgebra e trigonometria, problemas envolvendo séries telescópicas, expressões trigonométricas, equações algébricas, relações de Girard, enfim, um livro indispensável para todos os professores e estudantes desse segmento.

A VestSeller, juntamente com o autor, tem a certeza de, mais uma vez, estar contribuindo para a educação no Brasil, enriquecendo o mercado editorial com mais uma obra prima em Matemática de grande valor para estudantes e professores.



Renato Brito Bastos
Engenheiro Eletrônico – ITA 97
Diretoria VestSeller

Prefácio

A ideia de escrever esse livro teve início quando, em 2001, conheci a Revista Eureka, da olimpíada Brasileira de Matemática, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Lá existe uma sessão "Olimpíadas ao Redor do Mundo", na qual eles propõem problemas de olimpíadas de vários países, publicando soluções enviadas pelos leitores no número seguinte. Comecei a fazer esses problemas e enviá-los minhas soluções, sem muita esperança de publicação.

Fui surpreendido quando, no número 9 da revista, saíram 5 soluções minhas. A partir daí comecei a resolver tais problemas e adquiri alguns bons livros sobre o assunto (alguns estão listados na bibliografia).

Durante todo esse tempo fiquei com aquela ideia do livro na cabeça, até que ano passado (2009), navegando na internet, descobri o site da Editora Vestseller e lhes mandei um e-mail falando do meu projeto. Poucos dias depois, recebi uma resposta da editora dizendo estar interessada pelo projeto. Então comecei a escrever este livro que tem como principal intuito contribuir para educação no nosso país muito carente ainda de livros voltados para alunos de nível IME – ITA – Olimpíadas.

Os leitores que desejarem entrar em contato com o autor para fazer críticas, sugestões, bem como comunicar erros pontuais na presente obra, devem fazê-lo pelo e-mail: marcilic@hotmail.com. Desde já o autor agradece a colaboração.

Dedicatória

Gostaria de dedicar esse livro a algumas pessoas que foram muito importantes para em minha trajetória acadêmica: Em primeiro lugar à minha mãe, que sempre fez de tudo pra me propiciar uma excelente educação; ao professor Marcilio Rangel, do Instituto Dom Barreto, um grande incentivador da educação no estado do Piauí; ao professor João Xavier da Cruz Neto, que foi meu orientador na graduação da UFPI; ao professor João Benício de Melo Neto, uma grande contribuição na minha educação; ao professor Jurandir de Oliveira Lopes Xavier, que foi meu orientador na especialização da UFPI.

Agradecimentos

O autor agradece a colaboração do seu irmão Marcio Miranda (Professor de Matemática do IFPI - Picos) e a Ítalo Dowell (aluno do curso de Matemática da UFPI) pela revisão e sugestões.

Agradece também ao professor Renato Brito (ITA–VestSeller) pela incansável revisão técnica dos originais, bem como ao professor Filipe Rodrigues de S. Moreira (engenheiro do ITA) por engrandecer essa obra com um excelente artigo sobre *Congruências lineares* que integra o Apêndice desse livro.

Índice

Parte I

<i>Capítulo 1. Problemas de Olimpíadas de Matemática</i>	13
<i>Capítulo 2. Problemas de treinamento</i>	35

Parte II

<i>Capítulo 3. Soluções do capítulo 1</i>	51
<i>Capítulo 4. Soluções do capítulo 2</i>	144

Apêndices

Apêndice 1. Congruência / resumo das propriedades	205
Apêndice 2. Congruência / resumo teórico	207
Apêndice 3. Fórmulas Trigonométricas	217
Bibliografia	219
Sites Acessados	221

Parte I

Capítulo 1 – Problemas de Olimpíadas de Matemática

Capítulo 2 – Problemas de Treinamento

Capítulo 1

Problemas de Olimpíadas de Matemática

Questão 1 (Hong Kong 1997)

Se a, b, c são as raízes da equação:

$$x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Calcule o valor da expressão:

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}.$$

Questão 2 (França 2005)

Sejam x, y inteiros positivos, tais que $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Prove que $x - y$ é um quadrado perfeito.

Questão 3 (Baltic Way 1995)

Prove que $\sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{1}{8}$.

Questão 4 (Croácia 2005)

Prove que existe um múltiplo de 2^{2005} que tem 2005 dígitos e é formado apenas por algarismos 2 e 5.

Questão 5 (Áustria 2005)

Encontre todos os naturais a, b, c , tais que

$$a + b + c = \text{mmc}(a, b, c).$$

Questão 6 (Cone sul 1993)

Em um tabuleiro de xadrez 8×8 , estão escritos ordenadamente os números de 1 a 64. Na primeira fila, da esquerda para a direita, estão os números de 1 a 8; na segunda fila da esquerda para a direita estão os números de 9 a 16, etc. Colocam-se sinais $+$ ou $-$ a cada número, de maneira que em cada fila haja 4 sinais $+$ e 4 sinais $-$, o mesmo ocorrendo para cada coluna. Em seguida, somam-se os 64 números obtidos. Ache os possíveis resultados desta soma.

Questão 7 (Bulgária)

Seja $p(x)$ um polinômio do segundo grau, tal que:

$$p(0) = \cos^3 10^\circ, p(1) = \cos 10^\circ \sin^2 10^\circ \text{ e } p(2) = 0.$$

Calcule o valor de $2\sqrt{3} \cdot p(3)$.

Questão 8 (Bulgária 2003)

Considere todas as "palavras" formadas por a's e b's. Nessas palavras, podemos fazer as seguintes operações: trocar um bloco **aba** por um bloco **b**, trocar um bloco **bba** por um bloco **a**. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a sequência baaa...a a partir da sequência aaaa...aaab, onde cada sequência tem 2003 a's.

Questão 9 (Espanha 2000)

Prove que não existe nenhuma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1$.

Questão 10 (Espanha 1999)

Sejam a, b, c números reais não nulos tais que $a + b + c \neq 0$, mostre que se

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}, \text{ então}$$

$$\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}}.$$

Questão 11 (Banco do Cone Sul)

Demonstrar que, se x, y, z são reais positivos, então:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x} \geq \frac{3}{2}$$

Questão 12 (Rússia 1998)

Existem números de n algarismos M e N em que todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que M divide N ?

Questão 12.1

Existem números de n algarismos M e N em que todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que N divide M ?

Questão 13 (Espanha 1995)

Seja p um número primo, encontre todos os pares (x, y) tais que:

$$p \cdot (x + y) = xy.$$

Questão 14 (Bielorrússia)

Sejam a, b, c números reais positivos, tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+cb} \geq \frac{3}{2}$$

Questão 15 (Espanha 1985)

Seja n inteiro positivo, prove que $(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)2n$ é divisível por 2^n .

Questão 16 (Estados Unidos 1979)

Determine inteiros não negativos $(n_1, n_2, \dots, n_{14})$ tais que:

$$n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{14}^4 = 1599.$$

Questão 17 (IMO 1975)

Sejam $n = 4444^{4444}$, A a soma dos dígitos de n e B a soma dos dígitos de A . Calcule a soma dos dígitos de B .

Questão 18 (Putnam 1948)

Seja n um número inteiro positivo. Prove que:

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$$

Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x . A parte inteira de um número real x é o maior inteiro x que não seja maior que x .

Exemplos: $\lfloor 1,41 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Questão 19 (Suécia)

Sejam x, y, z números inteiros positivos, tais que $x^y = z$, $y^z = x$, $z^x = y$. Prove que $x = y = z = 1$.

Questão 20 (Torneio das Cidades 1993)

Três pilhas de caroços são dadas sobre uma mesa. É permitido adicionar ou remover de uma pilha um número de caroços igual à soma do número de caroços das outras duas pilhas. Por exemplo, $[12, 3, 5]$ podem tornar-se $[12, 20, 5]$ pela adição de $17 = 12 + 5$ para a pilha de 3 ou tornar-se $[4, 3, 5]$

pela remoção de $8 = 3 + 5$ caroços da pilha com 12. É possível, iniciando com pilhas possuindo 1993, 199 e 19 caroços, conseguir uma pilha vazia depois de uma sequência de operações permitidas?

Questão 21 (IMO 1970)

Encontre todos os n naturais com a seguinte propriedade: o conjunto $C = \{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ pode ser dividido em dois subconjuntos A e B tais que $A \cup B = C$ e $A \cap B = \emptyset$ e o produto dos elementos do conjunto A é igual ao produto dos elementos do conjunto B .

Questão 22 (Cone Sul 1992)

Prove que não existem x, y, z inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Questão 23 (Rússia 1968)

Qual o maior dos números: 31^{11} ou 17^{14} ?

Questão 24 (Estados Unidos 1976)

Encontre todos os inteiros a, b e c tais que $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$.

Questão 25 (Rússia)

Sejam a, b, c, d números reais positivos, tais que $abcd = 10$. Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Questão 26 (São Petersburgo 1998)

Em quantos zeros pode acabar o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ para n natural?

Questão 27 (Espanha 2008)

Qual o maior dos números: $999!$ ou 500^{999} ? Justifique.

Questão 28 (Moldávia 1999)

Ache todos os números reais $x_1, x_2, \dots, x_{1999}$, tais que:

$$1 + (x_1)^2 = 2x_2; 1 + (x_2)^2 = 2x_3; 1 + (x_3)^2 = 2x_4; \dots; 1 + (x_{1999})^2 = 2x_1.$$

Questão 29 (Leningrado 1989)

Existem $n \geq 2$ números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números, a e b , e trocá-los por $a + \frac{b}{2}$ e $b - \frac{a}{2}$. Prove que, após feito um movimento, não podemos obter os números iniciais novamente.

Questão 30 (Balcânica)

Prove que o número 11...1122...225 formado por 1997 algarismos 1 e 1998 algarismos 2 é um quadrado perfeito.

Questão 31 (Torneio das cidades 1985)

Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Questão 32 (Balcânica)

Sejam x, y números inteiros tais que:

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Prove que $x + y = 10$.

Questão 33 (Hungria-Israel)

Encontre todos os inteiros positivos x, y tais que $5^x - 3^y = 16$.

Questão 34 (Asian Pacific 1998)

Mostre que não existem números inteiros positivos a e b tais que $(36a + b) \cdot (36b + a)$ seja uma potência de 2.

Questão 35 (Bélgica)

Prove que:

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Questão 36 (Torneio das cidades 1994)

Sejam a, b, c, d quatro inteiros positivos tais que $ad = bc$. Prove que $a + b + c + d$ não pode ser primo.

Questão 37 (Baltic Way 1997)

Encontre todas as triplas (a, b, c) de inteiros não-negativos satisfazendo $a \geq b \geq c$ e tais que $a^3 + 9b^2 + 9c = 1997$.

Questão 38 (África do Sul)

Resolva a equação:

$$36x^4 + 36x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = 0$$

Questão 39 (Grécia 2002)

Prove que $2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$.

Questão 40 (Ucrânia 1999)

Mostre que o número $9999999 + 1999000$ não é primo, ou seja, é composto.

Questão 41 (Rússia 2002)

Um número de 4 algarismos é escrito em um quadro negro. As operações permitidas são:

- adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9) ou;
- subtrair 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0).

É possível obtermos 2002 a partir do número 1234 utilizando algumas operações?

Questão 42 (Singapura 1988)

Calcule:

$$\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{98\sqrt{99} + 99\sqrt{98}} + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

Questão 43 (Argentina 2008)

Ache todos os números reais x tais que

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2008.$$

Questão 44 (Argentina 1997)

Ache todos os números naturais n tais que $\left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor$ seja um número primo.

Questão 45 (Cone Sul 1996)

Considere a sequência de números reais positivos $a_0, a_1, a_2, \dots$ definida por:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \text{ para todo inteiro } n \geq 0.$$

Mostre que para qualquer de valor de a_0 , sempre se tem $a_{1996} > 63$.

Questão 46 (Argentina 1998)

Determine todos os valores da expressão:

$$x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor$$

Questão 47 (Rioplatense 2005)

Encontre todos os números n tais que n possa ser expresso na forma $n = k + 2 \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor + 2$, em que k seja um inteiro não negativo.

Questão 48 (Argentina 2004)

Encontre todos os inteiros não-negativos a e b tais que $3 \cdot 2^a + 1 = b^2$.

Questão 49 (Mercosul 1997)

Calcule a soma:

$$\left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \sqrt{1996} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{1997} \right\rfloor.$$

Questão 50 (Argentina 1995)

Para cada inteiro positivo n seja $p(n)$ o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

- Determine $p(n)$ para todo n e calcular $p(1995)$.
- Determinar todos os pares n tais que $p(n) = 3$.

Questão 51 (Torneio das cidades 1997)

Sejam a, b inteiros positivos tais que $a^2 + b^2$ é divisível por ab . Prove que $a = b$.

Questão 52 (Eslovênia 2002)

Achar o menor número natural que é soma de 9 naturais consecutivos, é soma de 10 naturais consecutivos e é soma de 11 naturais consecutivos.

Questão 53 (Bielorússia 1998)

Existem números inteiros x, y tais que

$$3x^2 - 2y^2 = 1998.$$

Questão 54 (Inglaterra 1995)

Prove que $[(mn)!]^2$ é divisível por $(m!)^{n+1} \cdot (n!)^{m+1}$, para quaisquer m, n naturais.

Questão 55 (Torneio das cidades)

Existe alguma potência de 2, tal que seja possível rearranjar seus dígitos e obter uma outra potência de 2?

Questão 56 (Bélgica 1991)

Mostre que 111...111 formado por 1991 algarismos 1 não é um número primo.

Questão 57 (Bélgica 1992)

Se n inteiro positivo, encontre o maior inteiro positivo k tal que $2^k \mid (3^n + 1)$

Questão 58 (Moldávia 2002)

Encontre todas as soluções reais da equação:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Questão 59 (Bélgica 2005)

Encontre todos os inteiros positivos n tais que $\sqrt{n} + \sqrt{n+2005}$ seja inteiro.

Questão 60 (IMO 1959)

Mostre que, para todo n natural, a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível.

Questão 61 (Holanda 1998)

Encontre todos os números reais x tais que:

$$(x+1995) \cdot (x+1997) \cdot (x+1999) \cdot (x+2001) + 16 = 0.$$

Questão 62 (Lituânia 2006)

Se $a + b + c = 0$, prove que: $\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \cdot \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{b-a}\right) = 9.$

Questão 63 (Putnam 1986)

Determine o dígito das unidades de $\left\lfloor \frac{10^{20000}}{3+10^{100}} \right\rfloor$.

Questão 64 (Banco do cone sul)

Prove que todo inteiro é a soma de cinco cubos.

Questão 65 (Banco do cone sul)

Ache todos os inteiros m e n tais que:

$$2^m - 3^n = 1$$

Questão 66 (Bélgica 1999)

Determine todos os n naturais de 6 dígitos ($abcdef$), isto é, $n = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$, tais que $n = (def)^2$, isto é, $n = (10^2d + 10e + f)^2$.

Questão 67 (Hungria)

Sejam a e b reais positivos tais que $a + b = 1$. Prove que:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}.$$

Questão 68 (Polônia 1992)

Prove que, para todo k natural, $(k^3)!$ É divisível por $(k!)^{1+k+k^2}$.

Questão 69 (Argentina 2000)

Ache todos os números reais tais que:

$$x + 2y + 2z = xyz$$

Questão 70 (Argentina 1997)

Ache todos os números reais tais que:

$$\lfloor 19x + 97 \rfloor = 19 + 97x.$$

Questão 71 (Putnam)

Seja n um número natural. Prove que existe um múltiplo de n que tem que conter na sua representação decimal todos os números de 0 a 9.

Exemplo: 9234678105 é um múltiplo de 5 que contém todos os algarismos de 0 a 9.

Questão 72 (Rússia 1999)

A soma dos algarismos de um inteiro positivo n , escrito no sistema de numeração decimal, é igual a 100 e a soma dos algarismos do número $44n$ é 800. Determine a soma dos algarismos do número $3n$.

Questão 73 (Putnam 1972)

Seja n um número natural, $n > 1$. Prove que n não divide $2^n - 1$.

Questão 74 (Ibero-Americana 1999)

Seja n um inteiro maior do que 10 tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $S = \{1, 3, 7, 9\}$. Prove que n tem algum divisor primo maior ou igual a 11.

Questão 75 (Moldávia 2000)

Os números inteiros a, b, c satisfazem a relação $(a + b + c) = 0$. Mostre que o número $2(a^4 + b^4 + c^4)$ é um quadrado perfeito.

Questão 76 (Eslovênia 2001)

a) Mostre a desigualdade:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

b) Mostre que a parte inteira da expressão

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2}}$$

na qual m é um inteiro positivo, é igual a $2m - 1$ ou $2m - 2$.

Questão 77 (Espanha 1999)

Mostre que existe uma sequência de inteiros positivos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ tal que $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots + (a_n)^2$ seja um quadrado perfeito para todo inteiro positivo n .

Questão 78 (Estados Unidos 1992)

Mostre que:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 87^\circ \cdot \cos 88^\circ} + \frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ \cdot \sin 1^\circ}$$

Questão 79 (Uruguai 2002)

Seja $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, prove que x é um número inteiro.

Questão 80 (Uruguai 2004)

O número $N = 111\dots 111$ formado por 300 um's é quadrado perfeito?

Questão 81 (Uruguai 1999)

Existem x e y inteiros tais que: $5x^2 - 4y^2 = 1999$?

Questão 82 (Uruguai 2000)

Existem números reais x e y tais que:

$$x + y = 1, \quad x^2 + y^2 = 2 \quad \text{e} \quad x^3 + y^3 = 3 \quad ?$$

Questão 83 (Uruguai 2004)

Calcule $\sqrt{2004 \cdot 2002 \cdot 1998 \cdot 1996 + 36}$.

Questão 84 (Chile 1999)

Existem inteiros x e y tais que: $x^2 + y^2 = 1999xy$?

Questão 85 (Chile 2003)

Encontre todos os primos p, q tais que:

$$p + q = (p - q)^3$$

Questão 86 (Chile 2001)

Seja n um número natural, prove que $2^{2^n} - 1$ é múltiplo de 3.

Questão 87 (Chile 1999)

Um número é dito bom se a soma de seus divisores – exceto ele próprio – for maior do que ele. Por exemplo, 12 é bom, pois $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$. Entretanto, 15 não é bom, pois $1 + 3 + 5 = 9 < 15$. Prove que há infinitos números bons.

Questão 88 (Vietnã 2002)

Resolva a equação:

$$\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2.$$

Questão 89 (Canadá 1969)

Calcule a soma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$

Questão 90 (Pan - África 2004)

O número: $4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{97 - 56\sqrt{3}}$ é inteiro?

Questão 91 (Alemanha 2006)

Prove que a soma do produto de 4 números ímpares consecutivos com 16 é quadrado perfeito.

Questão 92 (Austrália 1983)

Mostre que a equação: $x^4 + 131 = 3y^4$ não possui solução inteira.

Questão 93 (Balcânica 1990)

Seja $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$. Determine todos os n tais que a_n é divisível por 11.

Questão 94 (Inglaterra 2001)

Encontre todos os reais positivos que satisfazem a equação:

$$x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Questão 95 (China 2002)

Se x e y são números reais, tais que $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$, determine o valor mínimo de $x^2 + y^2$.

Questão 96 (Inglaterra 1997)

Seja N um número de 4 algarismos, em que N não termina em zero. Defina $R(N)$ como sendo o número N escrito ao contrário. Por exemplo se $N = 3257$, então $R(N) = 7523$. Determine todos os N tais que $R(N) = 4N + 3$.

Questão 97 (Rússia 1998)

Um número de dez algarismos é interessante se seus dígitos forem todos distintos e se ele for múltiplo de 11111. Quantos números interessantes existem?

Questão 98 (Bielorússia 2001)

Determine o resto da divisão de

$$1! \cdot 5 + 2! \cdot 11 + \dots + k! \cdot (k^2 + 3k + 1) + \dots + 200! \cdot 40601 \quad \text{por } 2004.$$

Questão 99 (Rússia 1995)

Encontre todos os primos p , tais que o número $p^2 + 11$ tenha exatamente seis divisores diferentes (incluindo 1 e ele mesmo).

Questão 100 (Espanha 1998)

As tangentes dos ângulos de um triângulo são números inteiros positivos. Determine estes números.

Questão 101 (Canadá 1969)

Mostre que não existem números inteiros tais que $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Questão 102 (Argentina 2002)

Um número n de 3 algarismos, todos diferentes de zero, é dito bom se $n + 1$ é múltiplo do número de dois algarismos que se obtêm ao retirarmos o primeiro algarismo de n . Por exemplo, 123 não é bom, uma vez que 124 não é múltiplo de 23. Porém, 267 é bom, pois 268 é múltiplo de 67. Encontre todos os números bons.

Questão 103 (Eslovênia 1992)

Prove que, para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n$, o número:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \text{ é par.}$$

Questão 104 (Moldávia 1996)

Mostre que:

$$\frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \frac{1}{668} + \dots + \frac{1}{1996} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{1994 \cdot 1995 \cdot 1996}$$

Questão 105 (Rússia 2002)

Um número de 4 algarismos é escrito em um quadro negro. As operações permitidas são: adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9) ou subtrair 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0).

É possível que obtenhamos 2002 a partir do número 1234 utilizando algumas operações?

Questão 106 (Espanha 2008)

Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é múltiplo de 7.

Questão 107 (Chile 2008)

Sejam a, b, c números reais, tais que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Se $a + b + c \neq 0$, prove que $a = b = c$.

Questão 108 (Vietnã 1962)

Resolva a equação $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

Questão 109 (Chile 1997)

Encontre todos os inteiros tais que:

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

Questão 110 (Áustria 2004)

Encontre todos os inteiros **a** e **b** tais que:

$$(a + b^3) \cdot (a^3 + b) = (a + b)^4.$$

Questão 111 (Bósnia - Herzegovina 2005 - adaptada)

Sejam a, b, c inteiros positivos tais que $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$. Prove que abc é cubo perfeito.

Questão 112 (Espanha 2006)

Um número positivo x é tal que:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Mostre que $x^5 + \frac{1}{x^5}$ é inteiro e calcule seu valor.

Questão 113 (Portugal 1994)

Prove que o número $11\dots 11 - 22\dots 2$ (onde o primeiro número é formado por $2n$ algarismos 1 e o segundo número é formado por n algarismos 2) é um quadrado perfeito.

Questão 114 (Portugal 1994)

Ache o menor número natural que tem exatamente 1994 divisores.

Questão 115 (República Tcheca e Eslovaca 1999)

Mostre que para todo número natural n o produto:

$$\left(4 - \frac{2}{1}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{2}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{3}\right) \cdots \left(4 - \frac{2}{n}\right)$$

é um inteiro.

Questão 116 (Singapura)

Calcule o valor de: $\frac{1}{1+\cot 1^\circ} + \frac{1}{1+\cot 5^\circ} + \frac{1}{1+\cot 9^\circ} + \dots + \frac{1}{1+\cot 89^\circ}$.

Questão 117 (Rússia 2000)

Determine a soma:

$$S = \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

Questão 118 (Repúblicas Tcheca e Eslovaca 2000)

Se n é um número natural, mostre que $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ é divisível por 13 se, e somente se, n é par.

Questão 119 (Hungria-Israel 1990)

Prove que não existem inteiros positivos x, y tais que $x^2 + y + 2$ e $y^2 + 4x$ sejam ambos quadrado perfeito.

Questão 120 (Índia)

Encontre todos os pares de inteiros não-negativos (x, y) tais que:

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

Questão 121 (Uruguai 2001)

Calcule a soma:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2001 \cdot 2^{2000}.$$

Questão 122 (Hong Kong 2000)

Se $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 43^\circ + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 43^\circ + \sin 44^\circ} = a + b\sqrt{c}$, calcule a, b, c .

Questão 123 (China 2003)

Se $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right]$. Calcule o valor mínimo da expressão

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Questão 124 (Baltic Way 1992)

Denote por $d(n)$ o número de divisores positivos de um número natural n (incluindo 1 e n). Prove que existem infinitos n , tais que $\frac{n}{d(n)}$ é inteiro.

Questão 125 (Singapura 2008)

Calcule o valor da expressão:

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$$

Questão 126 (Singapura 2008)

Calcule o valor de $\frac{\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ}$.

Questão 127 (Alemanha 1998)

Prove que:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999$$

Questão 128 (Inglaterra 2006)

Seja n um número inteiro. Mostre que se $2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ é inteiro, então $2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ é quadrado perfeito.

Questão 129 (Holanda 1991)

Três números reais satisfazem as equações:

$$a + b + c = 3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 9 \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 + c^3 = 24$$

Calcule $a^4 + b^4 + c^4$.

Questão 130 (Baltic Way 1995)

Se a, b, c são números inteiros positivos, com a e c ímpares, a, b, c primos entre si e tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Prove que $b + c$ é quadrado perfeito.

Questão 131 (Finlândia 2000)

Prove que $\lfloor (3 + \sqrt{5})^n \rfloor$ é um número ímpar para todo natural n .

Questão 132 (Finlândia 2000)

Encontre todos os números naturais n tais que $n! > \sqrt{n^n}$.

Questão 133 (Holanda 1983)

Prove que se n é um inteiro positivo ímpar, então os dois últimos algarismos de $2^{2n} \cdot (2^{2n+1} - 1)$ na base 10 são 28.

Questão 134 (Holanda 1982)

Determine $\text{mdc}(n^2 + 2, n^3 + 1)$, onde $n = 9^{753}$.

Questão 135 (Holanda 1995)

Um canguru encontra-se num plano cartesiano. São permitidos dois tipos de saltos:

- i) 1 para a direita e 3 para cima
 - ii) 2 para a esquerda e 4 para baixo
- a) Prove que o canguru pode partir do ponto $(0, 0)$ e chegar ao ponto $(19, 95)$ e determine o número de saltos necessários para isso.
- b) Prove que partindo do ponto $(1, 0)$ o canguru não pode chegar ao ponto $(19, 95)$.
- c) Partindo do ponto $(0, 0)$ determine todos os pontos (m, n) com $m, n \geq 0$, tais que o canguru pode alcançar.

Questão 136 (África do Sul 1997)

Determine todos os inteiros não-negativos x, y tais que $1 + 3^x = 2^y$.

Questão 137 (Polônia)

Ache todos os inteiros x, y tais que:

$$x^2 \cdot (y - 1) + y^2 \cdot (x - 1) = 1$$

Questão 138 (Romênia)

Encontre todos os inteiros positivos x, y, z tais que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

Questão 139 (Rússia 1963)

Sejam a, b inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Prove que $\text{mdc}(a^2 + b^2, a + b) = 1$ ou 2 .

Questão 140 (Rússia 1962)

Seja o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Prove que não existem inteiros a, b, c, d tais que $P(19) = 1$ e $P(62) = 2$.

Questão 141 (Chile 2006)

Ache o maior número C tal que para todo x se verifica a desigualdade $x^2 \geq C \cdot \lfloor x \rfloor \cdot \{x\}$.

Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x . A parte inteira de um número real x é o maior inteiro x que não é maior que x .

Exemplos: $\lfloor 1,41 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Questão 142 (Irlanda 1999)

Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaz às condições:

- i) $f(ab) = f(a)f(b)$, se $\text{mdc}(a, b) = 1$
- ii) $f(p + q) = f(p) + f(q)$, se $\text{mdc}(p, q) = 1$

Mostre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

Questão 143 (Grécia 2000)

Determine o número primo p , tal que $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ seja um quadrado perfeito.

Questão 144 (Eslovênia 1999)

Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que: $f(x - f(y)) = 1 - x - y$, para todo x, y reais.

Questão 145 (IMO 1963)

Prove que $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Questão 146 (Bulgária 2008)

Prove que existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(f(n)) = 3n$, para todo n natural.

Questão 147 (Romênia 2003)

Mostre que para todo n natural, a parte fracionária de $\sqrt{n + 4n^2}$ não é maior do que 0,25.

Questão 148 (Estônia 2009)

Encontre todos os inteiros positivos (x, y, z) , tais que $99x + 100y + 101z = 2009$.

Questão 149 (Estônia 1994)

Prove que $n!$ termina em menos de $\frac{n}{4}$ zeros para todo n natural.

Questão 150 (México 1988)

Se a e b são números inteiros positivos. Prove que $11a + 2b$ é múltiplo de 19 se e somente se $18a + 5b$ também é.

Questão 151 (Eslovênia 2000)

Determine todos os números naturais a tais que a equação $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2000| + |x - 2001| = a$ possui uma única solução.

Questão 152 (México 1991)

A soma dos quadrados de dois números inteiros consecutivos pode ser um quadrado perfeito, por exemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Prove que a soma dos quadrados m inteiros consecutivos não pode ser um quadrado perfeito se $m = 3$ ou 6 e dê um exemplo de 11 inteiros consecutivos tais que a soma dos seus quadrados é um quadrado perfeito.

Questão 153 (Chile 1997)

Para cada inteiro positivo n , seja $K_n = n^2 + n + 1$. Prove que K_n não é quadrado perfeito para todo inteiro positivo n .

Questão 154 (Rússia)

Encontre todos os pares de naturais (a, b) com a seguinte propriedade: $a^2 + b$ e $b^2 + a$ são ambos quadrados perfeitos.

Questão 155 (Massachusetts 2007)

Prove as identidades:

$$a) \cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$$

$$b) \cos x + \cos 3x = \frac{\sin 4x}{2 \sin x}$$

$$c) \cos x + \cos 3x + \cos 5x = \frac{\sin 6x}{2 \sin x}$$

$$d) \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = \frac{\sin 8x}{2 \sin x}$$

$$e) \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-3)x + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

Questão 156 (Rússia 1983)

Se a e b são ângulos agudos, tais que:

$$\sin^2 a + \sin^2 b = \sin(a+b), \text{ prove que } a+b = \frac{\pi}{2}.$$

Questão 157 (Canadá 1974)

Seja ABCD um retângulo $BC = 3AB$. Se P e Q são pontos sobre BC tais que $BP = PQ = QC$, prove que:

$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC.$$

Questão 158 (Canadá 1969)

Sejam a, b, c lados de um triângulo. A bissetriz do ângulo C corta AB no ponto D .

Prove que $CD = \frac{ab \cdot \cos \frac{C}{2}}{a+b}.$

Questão 159 (Bulgária 1999)

Seja M o ponto médio do lado BC de um triângulo ABC no qual $\angle CAB = 45^\circ$ e $\angle ABC = 30^\circ$.

a) Determine $\angle AMC$.

b) Prove que $AM = \frac{AB \cdot BC}{2 \cdot AC}$

Questão 160 (KRMO 1997)

Um trapézio possui diagonais perpendiculares e altura 10. Encontre a área do trapézio sabendo que uma de suas diagonais mede 13.

Questão 161 (Bélgica 2006)

a) Encontre todos os números reais α tais que $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$.

b) Determine os inteiros a, b, c, d tais que $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$, são soluções da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Questão 162 (Índia 1997)

Prove que não existem inteiros positivos m, n tais que $\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m} = 4$.

Questão 163 (Índia 1992)

Num triângulo ABC , $\angle BAC = 2 \angle ABC$. Prove que $a^2 = b \cdot (b + c)$.

Questão 164 (Índia 1993)

Prove que existe um número natural n tal que $n!$ termina em exatamente 1993 zeros.

Questão 165 (Itália 1987)

Prove que para inteiro n , o número $3x^5 + 5x^3 - 8x$ é múltiplo de 120.

Questão 166 (Vietnã 1982)

Ache a, b, c inteiros tais que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$.

Questão 167 (MOCP)

Prove que $\sec 40^\circ + \sec 80^\circ + \sec 160^\circ = 6$.

Questão 168 (Croácia 2001):

Se $a + b + c = 0$, calcule o valor da expressão $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc(a^4 + b^4 + c^4)}$.

Questão 169 (Brasil 2003)

Sejam a, b, c números reais não-nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de $\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$.

Questão 170 (Áustria 1991)

Sejam a, b números racionais. Prove que, se $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ é racional, então $\sqrt[3]{a}$ e $\sqrt[3]{b}$ são racionais.

Questão 171 (África do Sul 1998)

$\log_8 10$ é racional? Justifique.

Questão 172 (Estados Unidos 1973)

Encontre todas as soluções (reais ou complexas) do sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$$

Capítulo 2

Problemas de Treinamento

Questão 01

Prove que, para todo n natural, existem n números inteiros consecutivos que não são primos.

Questão 02

Prove que toda função pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar.

Questão 03

Prove que há infinitos números primos.

Questão 04

Prove que a equação $3^x + 4^x = 5^x$ não tem solução se $x > 2$.

Questão 05

- a) Prove que $\cos 10^\circ$ é irracional.
- b) Prove que $\cos 2^\circ$ é irracional.
- c) Prove que $\cos 1^\circ$ é irracional.
- d) Prove que $\cos 2\alpha$ é irracional, então $\sin \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ são irracionais.
- e) Prove que $\sin 1^\circ$ e $\operatorname{tg} 1^\circ$ são irracionais.

Questão 06

Prove que $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$.

Questão 07

Prove que para todo inteiro $n > 1$ vale que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

Questão 08

Prove que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, onde $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é bijetora.

Questão 09

- a) Prove que $\cos 20^\circ$ é irracional
- b) Prove que $\cos 4^\circ$ é irracional
- c) Prove que $\cos^2 2^\circ$ é irracional
- d) Prove que $\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ$ é irracional

Questão 10

Resolva a equação no conjunto dos números reais:

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$$

Questão 11

Prove que toda matriz pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

Questão 12

Calcule a soma $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Questão 13

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ termos de uma P.A., prove que:

a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde r é a razão da P.A.

b)
$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

c)
$$\frac{1}{a_2 \cdot a_1} + \frac{1}{a_3 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} = \frac{n-1}{a_n \cdot a_1}$$

Questão 14

Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Questão 15

Calcule a soma $S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}}$.

Questão 16

Prove que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Questão 17

Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

Questão 18

Coloque os números em ordem crescente: 2^{11996} , 3^{8997} , 5^{5998} .

Questão 19 (Concurso para professor do Cefet – Piauí – Adaptada)

Os movimentos de uma partícula estando nos pontos (x, y) do plano, com $x, y \in \mathbb{N}$ são: $S(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$ e $D(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$. É possível sair do ponto $P(0, 0)$ para o ponto $Q(35, 16)$ usando esses movimentos?

Questão 20

Prove que $C_{1000, 500}$ não é divisível por 7.

Questão 21 (Concurso para professor do Cefet – Piauí – Adaptada)

Seja z um número complexo unitário. Se $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$. Calcule $z^n + \frac{1}{z^n}$.

Questão 22

Prove que a equação $a^n + b^n = c^{n+1}$ tem infinitas soluções para a, b, c, n naturais.

Questão 23

Encontre todos os números naturais a, b, c tais que $2^a + 2^b = 2^c$.

Questão 24

Ache uma equação do quarto grau cujas raízes são $\cos \frac{2\pi}{9}$, $\cos \frac{4\pi}{9}$, $\cos \frac{6\pi}{9}$ e $\cos \frac{8\pi}{9}$.

Questão 25

Sejam a, b, c números reais tais que $a + b + c = 0$. Prove que:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$

Questão 26

Prove que: $\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ + \log \operatorname{tg} 90^\circ = 0$.

Questão 27

Encontre o valor da soma:

$$S = \frac{1}{\log_2 2010!} + \frac{1}{\log_3 2010!} + \dots + \frac{1}{\log_{2009} 2010!} + \frac{1}{\log_{2010} 2010!}.$$

Questão 28

Prove que o produto de 4 números inteiros positivos consecutivos mais um é sempre quadrado perfeito.

Questão 29

Seja s um número natural, prove que no intervalo $[s, 2s]$ existe uma potência de 2.

Questão 30

Encontre todos os números naturais não-nulos a, b tais que $a + b = ab$.

Questão 31

Encontre todos os números naturais a, b, c tais que $a + b + c = abc$.

Questão 32

Seja ABC um triângulo. Prove que se $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = 2$, então o triângulo é retângulo.

Questão 33

Prove que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

(Identidade de Catalan)

Questão 34

Prove que $641 \mid (2^{32} + 1)$.

Questão 35

Resolva a equação $\sqrt[3]{14-x} + \sqrt[3]{14+x} = 4$.

Questão 36

Encontre todos os inteiros x, y tais que $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 7) \cdot (x + 8) = y^2$.

Questão 37

Prove que para todo $n \geq 2$, vale que: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Questão 38

Suponha que $a_1 = 2$ e $a_{k+1} = 3a_k + 1$, para todo $k \geq 1$. Encontre uma fórmula geral para $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Questão 39

Prove que $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$, para todo x real.

Questão 40

Prove que para quaisquer a, b, c reais positivos vale que:

$$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c) \geq 8abc.$$

Questão 41

Prove que os 1979 primeiros algarismos após a vírgula, do número $(6 + \sqrt{35})^{1980}$, são todos algarismos 9.

Questão 42

Calcule $\cos 72^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\sin 54^\circ$ e $\cos 54^\circ$.

Questão 43

Determine a imagem da função: $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$.

Questão 44 (Fórmula da soma dos senos de arcos em P.A.)

Prove que:

$$\sin x + \sin(x + r) + \sin(x + 2r) + \dots + \sin(x + kr) = \frac{\cos\left(x - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + kr + \frac{r}{2}\right)}{2 \sin \frac{r}{2}}$$

Questão 45

Prove que:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left((2n+1)x\right)}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Questão 46 (Fórmula da soma dos cossenos de arcos em P.A.)

Prove que:

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \dots + \cos(x+kr) =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\left(x - \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + kr + \frac{r}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\frac{r}{2}}$$

Questão 47

Prove que:

$$\cos x + \cos 2x + \cos(3x) + \dots + \cos(nx) =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}(n+1)x \cdot \cos nx}{\operatorname{sen} x} - 1.$$

Questão 48Prove que $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ$.**Questão 49**Prove que $\operatorname{tg}(30^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(3a) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + a) = \operatorname{tg} a$.**Questão 50**Quantos algarismos tem 2^{2000} ?**Questão 51**Prove que $\frac{\operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ} = \operatorname{tg} 40^\circ$.

Questão 52

Prove que se a, b, c estão em P.A. então $\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c}{\operatorname{cos} a + \operatorname{cos} b + \operatorname{cos} c} = \operatorname{tg} b$.

Questão 53

Sejam a, b dois lados de um triângulo, tal que sua área é dada pela expressão $\frac{a^2 + b^2}{4}$. Prove que este triângulo é retângulo.

Questão 54

Prove as identidades trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + x)$

b) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$

c) $\cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} = \frac{1}{64}$

d) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

e) $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

f) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

g) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$

Questão 55

Prove que $(1 - \cot x) \cdot (1 - \cot(45^\circ - x)) = 2$.

Questão 56

Sejam A, B, C ângulos de um triângulo, prove que:

a) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$.

b) Se $\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

c) $\operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} 3B + \operatorname{sen} 3C = -4 \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{3B}{2} \cdot \cos \frac{3C}{2}$.

Questão 57 (ITA 2004)

Prove se os ângulos α , β , γ de um triângulo satisfazem a equação:

$$\operatorname{sen}(3\alpha) + \operatorname{sen}(3\beta) + \operatorname{sen}(3\gamma) = 0,$$

então pelo menos um dos ângulos α , β , γ é igual a 60° .

Questão 58 (ITA 2002)

Se x , y , z são ângulos internos de um triângulo ABC e $\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z}{\cos y + \cos z}$,

prove que o triângulo ABC é retângulo.

Questão 59

Prove que $\operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ = 4$.

Questão 60

Se x , y , z são ângulos internos de um triângulo ABC e $\cos x + \cos y = \operatorname{sen} z$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

Questão 61

Prove que $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Questão 62

Prove que:

$$a) \cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1}a = \frac{\operatorname{sen} 2^n \cdot a}{2^n \cdot \operatorname{sen} a}.$$

$$b) \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \cot \frac{a}{2} - \cot a, \text{ para todo } a \neq \frac{k\pi}{2}.$$

$$c) \frac{1}{\operatorname{sen} a} + \frac{1}{\operatorname{sen} 2a} + \frac{1}{\operatorname{sen} 4a} + \dots + \frac{1}{\operatorname{sen} 2^n a} = \cot \frac{a}{2} - \cot 2^n a.$$

Questão 63

Calcule o período das funções abaixo:

a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x$

c) $\operatorname{sen} x - \cos x$

d) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x$

e) $\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x$

- f) $\sin^2 x$
- g) $\cos^2 x$
- h) $\operatorname{tg} 3x + \cos 4x$
- i) $\sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}$
- j) $\frac{\cos 3x}{\cotg 8x}$
- l) $\sec \frac{x}{2} \cdot \sin 3x$

Questão 64

Resolva as equações:

- a) $\sin x + \cos x + 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = 0.$
- b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$
- c) $\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = -\sqrt{2}.$

Questão 65 (ITA 96)

Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Então o valor de $y = \frac{\sin 2\alpha}{(\cos \alpha)^3 + (\sin \alpha)^3}$

será:

- a) $\frac{2(-1+m^2)}{m(4-m^2)}$
- b) $\frac{2(1+m^2)}{m(4+m^2)}$
- c) $\frac{2(-1+m^2)}{m(3-m^2)}$
- d) $\frac{2(1+m^2)}{m(3+m^2)}$
- e) $\frac{2(1+m^2)}{m(3-m^2)}$

Questão 70

Prove que $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Questão 71

Resolva as equações:

- a) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$
- b) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$
- c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
- d) $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x$
- e) $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cdot \cos 13x$
- f) $\sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x$
- g) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{-1 + 2\cos 3x}{2}$
- h) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{-3 + 4\sin 4x}{4}$
- i) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{4}{5}$
- j) $\cos x + \cos 2x + \cos (\pi - 3x) = \frac{8}{5}$
- k) $\sin 3x = \cos 2x$

Questão 72

Prove que $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Questão 73 (IME 2004)

Se $\sin x + \sin y = A$ e $\cos x + \cos y = B$ e $AB \neq 0$, calcule $\sin(x + y)$ em função de A e B .

Questão 74

Prove que $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.

Questão 75

Ache uma equação do terceiro grau cujas raízes são $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, $\cos \frac{5\pi}{7}$.

Questão 76

Calcule o valor das expressões:

a) $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

b) $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

c) $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

Questão 77

Resolva o sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^3 - 3x = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Questão 78

Prove as identidades:

a) $\cos 3x \cdot \cos x - \cos 6x \cdot \cos 2x - \sin 5x \cdot \sin 3x = 0.$

b) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin (x + y + z) =$
 $= 4 \cdot \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{z+y}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x+z}{2} \right).$

c) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$

d) Se $A + B + C = \pi$, prove que:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

e) $\cos x + \cos y + \cos z - \cos (x + y + z) =$
 $= 4 \cdot \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{z+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+z}{2} \right)$

f) $2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2(\alpha + \beta)$

Questão 79

Calcule o valor da expressão: $4 \cos^3 \frac{2\pi}{9} - 3 \cos \frac{2\pi}{9} - 4 \sin^3 \frac{2\pi}{9} + 3 \sin \frac{2\pi}{9}.$

Questão 80

Resolva a equação $8x^3 - 6x - 1 = 0.$

Questão 81

Resolva as inequações:

a) $1 - \operatorname{sen} x \geq \cos^2 x$

b) $\operatorname{sen} x < \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x > 1$

d) $\cos 2x \geq \cos x$

e) $\cos x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x > \sqrt{2}$

f) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x > \frac{1}{4}$

g) $3 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \cos^2 x > \frac{5}{2}$

Questão 82

Prove as identidades:

a) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$

b) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

c) $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} + \operatorname{arc} \cos \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$

Questão 83

Resolva a equação: $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

Questão 84 (IME)

Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2995 \cdot 2998} + \frac{1}{2998 \cdot 3001}.$$

Questão 85

Prove que $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < 3$, para todo n natural.

Questão 86

Sejam a, b, c as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 0$. Calcule o valor de:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$

c) $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

d) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}$

e) $a^2 + b^2 + c^2$

f) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

g) $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$

h) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$

i) $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c}$

j) $\frac{bc+ac}{ab} + \frac{ab+ac}{bc} + \frac{ab+bc}{ac}$

k) $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$

Questão 87

Prove que $\operatorname{tg}^2 1^\circ + \operatorname{tg}^2 3^\circ + \dots + \operatorname{tg}^2 87^\circ + \operatorname{tg}^2 89^\circ = 4005$.

Parte II

Capítulo 3 – Soluções do capítulo 1

Capítulo 4 – Soluções do capítulo 2

Capítulo 3

Soluções do capítulo 1

URGENT**Questão 1 (Hong Kong 1997)**Se a, b, c são as raízes da equação

$$x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Calcule o valor da expressão: $\frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$.**Solução**

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

$$\frac{b^5 - c^5}{b - c} = c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4$$

$$\frac{c^5 - a^5}{c - a} = a^4 + a^3c + a^2c^2 + ac^3 + c^4$$

Pelas relações de Girard, temos que:

$$a + b + c = 2$$

$$ab + ac + bc = -3$$

$$abc = 4$$

Primeiro passo: Calcular $a^2 + b^2 + c^2$

$$a + b + c = 2 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 10.$$

Segundo Passo: Calcular $a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2$

$$ab + ac + bc = -3 \Rightarrow (ab + ac + bc)^2 = 9 \Rightarrow a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c) = 9 \Rightarrow a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2 = -7.$$

Terceiro Passo: Calcular $a^4 + b^4 + c^4$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 10 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 100 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) = 100 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 114$$

Quarto passo: Calcular $a^2b + ab^2 + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } ab) \Rightarrow a^2b + ab^2 + abc = 2ab$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } ac) \Rightarrow a^2c + abc + ac^2 = 2ac$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } cb) \Rightarrow abc + cb^2 + bc^2 = 2cb$$

Somando tudo membro a membro, temos que:

$$a^2b + ab^2 + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 + 3abc =$$

$$= 2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2b + ab^2 + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 = -18$$

Quinto passo: Calcular $a^3b + ab^3 + ac^3 + a^3c + b^3c + bc^3$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } ab^2) \Rightarrow a^2b^2 + ab^3 + ab^2c = 2ab^2$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } a^2b) \Rightarrow a^3b + a^2b^2 + a^2bc = 2a^2b$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } cb^2) \Rightarrow ab^2c + c^2b^2 + b^2c^2 = 2cb^2$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } c^2b) \Rightarrow abc^2 + c^2b^2 + bc^3 = 2bc^2$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } ac^2) \Rightarrow a^2c^2 + abc^2 + a^2c^2 = 2ac^2$$

$$a + b + c = 2 \text{ (multiplicando por } a^2c) \Rightarrow a^3c + a^2bc + a^2c^2 = 2a^2c$$

Somando tudo membro a membro, temos que:

$$(a^3b + ab^3 + ac^3 + a^3c + b^3c + bc^3) + 2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) + 2abc(a + b + c) =$$

$$= 2(a^2b + ab^2 + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2) \Rightarrow$$

$$= a^3b + ab^3 + ac^3 + a^3c + b^3c + bc^3 = -38$$

Agora vamos ao problema:

Queremos calcular

$$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + (c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) + (a^4 + a^3c + a^2c^2 + ac^3 + c^4) =$$

$$= 2(a^4 + b^4 + c^4) + (a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) + (a^3b + ab^3 + ac^3 + a^3c + b^3c + bc^3) =$$

$$= 2 \cdot 114 + (-7) + (-38) = 183$$

Questão 2 (França 2005)

Sejam x, y inteiros positivos tais que $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Prove que $x - y$ é quadrado perfeito.

Solução

Lema: Se a, b, c, m, n são naturais tais que $a \cdot c = m^2$ e $a \cdot b = n^2$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$, então b e c são quadrados perfeitos.

Prova: Se $a \cdot c = m^2$ e $a \cdot b = n^2 \Rightarrow a^2bc = (mn)^2$. Agora seja p um fator primo que divide b então p não divide c (pois $\text{mdc}(b, c) = 1$), então o fator p aparece um número par de vezes no segundo membro, e um número par de vezes em a^2 , logo p tem que aparecer um número par de vezes em b . Logo b é quadrado perfeito. Analogamente, c é quadrado perfeito.

Agora vamos ao nosso problema:

$$3x^2 + x = 4y^2 + y \Rightarrow y^2 = 3x^2 - 3y^2 + x - y = (x - y) \cdot (3x + 3y + 1)$$

$$3x^2 + x = 4y^2 + y \Rightarrow x^2 = 4x^2 - 4y^2 + x - y = (x - y) \cdot (4x + 4y + 1)$$

$$\text{Agora seja } d = \text{mdc}(3x + 3y + 1, 4x + 4y + 1). \text{ Como } d \mid (3x + 3y + 1) \text{ e } d \mid (4x + 4y + 1) \Rightarrow d \mid 4 \cdot (3x + 3y + 1) - 3 \cdot (4x + 4y + 1) \Rightarrow d \mid 1.$$

Logo, $d = 1$. Portanto, pelo lema, $x - y$ é quadrado perfeito.

Questão 3 (Baltic Way 1995)

Prove que $\operatorname{sen}^3 18^\circ + \operatorname{sen}^2 18^\circ = \frac{1}{8}$.

Solução

É fácil ver que $\operatorname{sen} 18^\circ = \cos 72^\circ$. Temos também que:

$$\cos 216^\circ = 4\cos^3 72^\circ - 3\cos 72^\circ \text{ (pois } \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \text{)}$$

$$\cos 144^\circ = 2\cos^2 72^\circ - 1 \text{ (pois } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{)}$$

Daí temos que:

$$\operatorname{sen}^3 18^\circ + \operatorname{sen}^2 18^\circ = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos^3 72^\circ + \cos^2 72^\circ = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 216^\circ + 4\cos 144^\circ + 6\cos 72^\circ + 4 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 36^\circ - 4\cos 36^\circ + 6\cos 72^\circ + 4 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(\cos 72^\circ - \cos 36^\circ) = -3 \Leftrightarrow \cos 72^\circ - \cos 36^\circ = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\operatorname{sen} \frac{72^\circ + 36^\circ}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{72^\circ - 36^\circ}{2} \Leftrightarrow -2\operatorname{sen} 54^\circ \cdot \operatorname{sen} 18^\circ = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen} 54^\circ \cdot \operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 \cdot \operatorname{sen} 54^\circ \cdot \operatorname{sen} 18^\circ \cdot 2 \cdot \cos 54^\circ \cdot \cos 18^\circ}{4 \cdot \cos 54^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 108^\circ \cdot \operatorname{sen} 36^\circ}{4 \cdot \cos 54^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \text{ pois } \operatorname{sen} 108^\circ = \cos 18^\circ \text{ e } \operatorname{sen} 36^\circ = \cos 54^\circ.$$

Questão 4 (Croácia 2005)

Prove que existe um múltiplo de 2^{2005} que tem 2005 dígitos e é formado apenas por algarismos 2 e 5.

Solução

Seja $A_1 = 2$, $A_2 = 52$, $A_3 = 552$, e assim por diante. Tal construção se faz da seguinte forma: Começa com 2 que é divisível por 2. E então segue a seguinte regra:

i) 2, se $2^{n+1} \mid A_n$.

ii) 5 caso contrário.

Provemos por indução que $2^n \mid A_n$

i) Para $n = 1$ é válido.

ii) Suponhamos válida a propriedade para $n = k$

$$2^n \mid A_n \text{ (H.I.)}$$

iii) Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Se $2^{n+1} \mid A_n$, então $A_{n+1} = 2 \cdot 10^n + A_n$ que é divisível por 2^{n+1} , pois $2 \cdot 10^n$ e A_n são ambos divisíveis por 2^{n+1} .

Caso contrário, $A_{n+1} = 5 \cdot 10^n + A_n = 5^{n+1} \cdot (2^n) + 2^n \cdot I$, em que I é um número ímpar. Assim, $A_{n+1} = 5^{n+1} \cdot (2^n) + 2^n \cdot I = 2^n \cdot (I + 5^{n+1})$ que é divisível por 2^{n+1} , pois $(I + 5^{n+1})$ é par.

Em qualquer caso, temos que $2^{n+1} \mid A_{n+1}$. Assim $2^{2005} \mid A_{2005}$.

Questão 5 (Áustria 2005)

Encontre todos os naturais a, b, c tais que $a + b + c = \text{mmc}(a, b, c)$.

Solução

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$, daí $c \leq a + b + c \leq 3c$, daí $\text{mmc}(a, b, c) = 2c$ ou $3c$. Se $\text{mmc}(a, b, c) = 3c$, então $c^3 = 3c$, logo $c = 0$ ou $c = \pm \sqrt{3}$ absurdo. E se $\text{mmc}(a, b, c) = 2c = a + b + c$, logo $a + b = c$. Daí $\text{mmc}(a, b, c) = 2c = 2(a + b)$. Daí $2b < \text{mmc}(a, b, c) \leq 4b$, logo $\text{mmc}(a, b, c) = 3b$ ou $4b$, daí $2c = 3b$ ou $2c = 4b$. No primeiro caso, temos $b = \frac{2c}{3}$ e $a = \frac{c}{3}$ e

no segundo caso temos $b = \frac{c}{2}$, logo $a = \frac{3c}{2}$ absurdo, logo as soluções são $(a, 2a, 3a)$ em que a é natural e suas permutações.

Questão 6 (Cone sul 1993)

Em um tabuleiro de xadrez 8×8 , estão escritos ordenadamente os números de 1 a 64. Na primeira fila, da esquerda para a direita, estão os números de 1 a 8; na segunda fila, da esquerda para a direita, estão os números de 9 a 16, etc. Colocam-se sinais $+$ ou $-$ a cada número, de maneira que em cada fila haja 4 sinais $+$ e 4 sinais $-$, o mesmo ocorrendo para cada coluna. Depois somam-se os 64 números obtidos. Ache os possíveis resultados desta soma.

Solução

Coloque na primeira linha: $0 + 1, 0 + 2 + \dots + 0 + 8$; na segunda linha: $8 + 1, 8 + 2 + \dots + 8 + 8$; ... na oitava linha: $56 + 1, 56 + 2, \dots, 56 + 8$; daí teremos na primeira linha 4 zeros com sinais $+$ e 4 zeros com sinais $-$, na segunda linha 4 oitos com sinais $+$ e 4 oitos com sinais $-$, na terceira linha 4 dezesesseis com sinais $+$ e 4 dezesesseis com sinais $-$, ..., na oitava linha 4 cinquenta e seis com sinais $+$ e 4 cinquenta e seis com sinais $-$, na primeira coluna 4 um's com sinais $+$ e 4 um's com sinais $-$, na segunda coluna 4 dois com sinais $+$ e 4

dois com sinais $-$, ..., na oitava coluna 4 oitos com sinais $+$ e 4 oitos com sinais $-$, logo a soma é sempre zero.

Questão 7 (Bulgária)

Seja $p(x)$ um polinômio do segundo grau tal que:

$$p(0) = \cos^3 10^\circ, \quad p(1) = \cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ \quad \text{e} \quad p(2) = 0$$

Calcule o valor de $2\sqrt{3} \cdot p(3)$.

Solução

Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$. Como $p(0) = \cos^3 10^\circ$, temos que $c = \cos^3 10^\circ$.

Como $p(1) = \cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ \Rightarrow a + b = \cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ - \cos^3 10^\circ$.

Como $p(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + \cos^3 10^\circ = 0 \Rightarrow 2a + 2(a + b) = -\cos^3 10^\circ \Rightarrow$

$$2a = -\cos^3 10^\circ - 2(\cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ - \cos^3 10^\circ) = -2\cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ + \cos^3 10^\circ.$$

$$p(3) = 9a + 3b + c = 2 \cdot (2a) + (4a + 2b) + (a + b) + c = 2 \cdot (-2\cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ + \cos^3 10^\circ) + (-\cos^3 10^\circ) + (\cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ - \cos^3 10^\circ) + \cos^3 10^\circ =$$

$$-3\cos 10^\circ \cdot \sin^2 10^\circ + \cos^3 10^\circ = -3\cos 10^\circ \cdot (1 - \cos^2 10^\circ) + \cos^3 10^\circ =$$

$$= 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} \cdot p(3) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Nota: Nesse problema foi usada a fórmula $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Questão 8 (Bulgária 2003)

Considere todas as "palavras" formadas por a's e b's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco aba por um bloco b, trocar um bloco bba por um bloco a. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a sequência baaa...a à partir da sequência aaaa...aaab, onde cada sequência tem 2003 a's.

Solução

Seja $P(A)$ = a soma das posições dos a's. Note que $P(A)$ é sempre ímpar, pois:

Operação 1: bba $\rightarrow$ a

Neste caso, a posição dos a's antes do bloco bba não se altera e a posição dos a's após o bloco bba diminuiu em 2.

$$\text{Ex: } aaabbbabaa \rightarrow P(A) = 1 + 2 + 3 + 6 + 8 + 9 = 29$$

Após a troca $\rightarrow$ aaaabaa $\rightarrow$

$$\rightarrow P(A) = 1 + 2 + 3 + (6 - 2) + (8 - 2) + (9 - 2) = 29 - 6 = 23$$

Operação 2: $a \rightarrow bba$

Neste caso, a posição dos a's antes do bloco bba não se altera e a posição dos a's após o bloco bba aumenta em 2.

Exemplo: aaabbbababab $\rightarrow P(A) = 1 + 2 + 3 + 7 + 9 + 11 = 33$

Após a troca aaabbbab**bb**abab $\rightarrow$

$$\rightarrow P(A) = 1 + 2 + 3 + 7 + (9 + 2) + (11 + 2) = 33 + 4 = 37$$

Operação 3: $aba \rightarrow b$

Neste caso, a posição dos a's antes do bloco bba não se altera e a posição dos a's após o bloco bba diminui em 2. Além disso, são retirados dois números da forma $k, k + 2$, cuja soma é sempre par.

Exemplo: aab**ab**ababba $\rightarrow P(A) = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 11 = 32$

Após a troca $\rightarrow$ aab**bb**ababba $\rightarrow$

$$\rightarrow P(A) = 1 + 2 + (8 - 2) + (11 - 2) = 18 = 32 - (4 + 6) - 4.$$

Obs: Neste caso foram retirados os números 4 e 6.

Operação 4: $b \rightarrow aba$

Neste caso, a posição dos a's antes do bloco bba não se altera e a posição dos a's após o bloco bba aumenta em 2. Além disso são acrescentados dois números da forma $k, k + 2$.

Exemplo: aabababab $\rightarrow P(A) = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 = 21$

Após a troca $\rightarrow$ aaba**ba**abab $\rightarrow$

$$\rightarrow P(A) = 1 + 2 + 4 + (5 + 7) + (6 + 2) + (8 + 2) = 37$$

Obs: Neste caso, foram acrescentados os números 5 e 7.

Em qualquer caso, após a operação somamos ou subtraímos um número par ao $P(A)$.

Assim, é impossível chegarmos a posição aaa...b, pois,

$$P(\text{aaaa...b}) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2003 = \frac{2004 \cdot 2003}{2} \text{ que é par, enquanto que}$$

$$P(\text{baaa...a}) = 2 + 3 + \dots + 2003 + 2004 = \frac{2006 \cdot 2003}{2} \text{ que é ímpar.}$$

Questão 9 (Espanha 2000)

Prove que não existe nenhuma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1$.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que exista uma f tal que $f(f(n)) = n + 1$, para todo n natural.

Lema: Existe um t natural tal que $f(t) > t$.

Prova:

Suponhamos, por absurdo, que $f(x) = b < x$, para todo x natural, então $f(f(x)) = f(b) < b \Rightarrow x + 1 < b < x$, absurdo!

Vamos trabalhar esse t . Se $f(t) = b \Rightarrow f(f(t)) = f(b) \Rightarrow t + 1 = f(b) \Rightarrow f(f(b)) = f(t + 1) \Rightarrow b + 1 = f(t + 1)$.

Provaremos, por indução, que $f(t + k) = b + k$, para todo k natural.

i) Para $k = 1$, vale a propriedade, pois $b + 1 = f(t + 1)$.

ii) Suponhamos a propriedade válida para $k = s$

$$f(t + s) = b + s \text{ (H.I.)}$$

iii) Vamos provar que vale para $k = s + 1$

$$\begin{aligned} f(t + s) = b + s &\Rightarrow f(f(t + s)) = f(b + s) \Rightarrow t + s + 1 = f(b + s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(t + s + 1) = f(f(b + s)) \Rightarrow f(t + s + 1) = (b + s + 1). \end{aligned}$$

Portanto vale a propriedade para todo k natural.

Temos então que se $c > t \Rightarrow f(c) = f(t + (c - t)) = b + c - t$.

Temos $f(t + k) = b + k \Rightarrow f(f(t + k)) = f(b + k) \Rightarrow t + k + 1 = b + (b + k - t) \Rightarrow 2t + 1 = 2b$, absurdo! (pois o primeiro lado é ímpar e o segundo é par).

Questão 10 (Espanha 1999)

Sejam a, b, c , números reais não nulos, tais que $a + b + c \neq 0$. Mostre que se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, então $\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}}$.

Solução

Se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Tirando o mmc e fazendo meios pelos extremos, temos:

$$(a + b + c) \cdot (ab + ac + bc) = abc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b) \cdot (ab + ac + bc) + c \cdot (ab + ac + bc) = abc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b) \cdot (ab + ac + bc) + abc + ac^2 + bc^2 = abc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b) \cdot (ab + ac + bc) + c^2 \cdot (a + b) = 0.$$

$$(a + b) \cdot (ab + ac + bc + c^2) = 0 \Rightarrow (a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c) = 0.$$

$(a + b) = 0$ ou $a + c = 0$ ou $b + c = 0$, logo $a = -b$ ou $a = -c$ ou $b = -c$.

Faremos o caso $a = -b$ (os outros dois casos são análogos).

Se $a = -b$, temos que $a^{1999} = (-b)^{1999} = -b^{1999}$, aí $\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} =$

$$= -\frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{c^{1999}} \text{ e } \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}} = \frac{1}{-b^{1999} + b^{1999} + c^{1999}} =$$

$$= \frac{1}{c^{1999}}.$$

$$\text{Portanto } \frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}}.$$

Questão 11 (Banco do Cone Sul)

Demonstrar que se x, y, z são reais positivos então: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x} \geq \frac{3}{2}$.

Solução

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{x}{y+z}\right) + \left(1 + \frac{y}{x+z}\right) + \left(1 + \frac{z}{y+x}\right) \geq \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+x}\right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(x+y) + (y+z) + (x+z)] \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+x}\right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x+y) + (y+z) + (x+z)] \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+x}\right) \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \text{ onde } a = x+y, b = y+z, c = x+z, \text{ o que é}$$

verdade por M.H $\leq$ M.A.

Questão 12 (Rússia 1998)

Existem números de n algarismos M e N onde todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que M divide N ?

Solução

Se $M \mid N \Rightarrow M \cdot K = N$, absurdo, pois $M \cdot K$ é par e N é ímpar.

Conclusão: Não existem M e N que satisfaçam às condições do problema.

Obs: Ao fazer esse problema pensei em uma variante desse problema:

Questão 12.1

Existem números de n algarismos M e N onde todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que N divide M .

Solução

$$M \equiv 0 + 2 + 4 + 6 + 8 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$N \equiv 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \equiv 7 \pmod{9}$$

$N \mid M \Rightarrow N \cdot K = M \Rightarrow 7 \cdot K \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow K \equiv 8 \pmod{9} \Rightarrow K \geq 8$. Mas $N \geq 13579 \Rightarrow N \cdot K > 10^5$, logo M possui mais de 5 algarismos.

Questão 13 (Espanha 1995)

Seja p um número primo. Encontre todos os pares (x, y) tais que $p \cdot (x + y) = x \cdot y$.

Solução

Como $p \cdot (x + y) = x \cdot y$, e p é primo, então $p \mid x$ ou $p \mid y$, logo $p \cdot a = x$ ou $p \cdot b = y$, onde a, b são inteiros. No primeiro caso temos:

$$p \cdot (p \cdot a + y) = p \cdot a \cdot y \Rightarrow (p \cdot a + y) = a \cdot y \Rightarrow y \cdot (a - 1) = p \cdot a \Rightarrow y = \frac{p \cdot a}{a - 1}.$$

Como $\text{mdc}(a, a - 1) = 1$, então $a - 1 \mid p$, logo $a - 1 = \pm 1$, ou $a - 1 = \pm p$, assim as soluções são $(0, 0)$, $(2p, 2p)$, $(p(p + 1), (p + 1))$, $(p(1 - p), (p - 1))$ respectivamente. E por simetria $((p + 1), p \cdot (p + 1))$, $((p - 1), p \cdot (1 - p))$. O segundo caso é análogo.

Questão 14 (Bielorrússia)

Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prove que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+cb} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução

Por M.H $\leq$ M.A, temos que $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$. Fazendo $x = 1 + ab$,

$$y = 1 + ac \text{ e } z = 1 + bc, \text{ temos que } \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+cb} \geq \frac{9}{3+ab+ac+bc}.$$

$$\text{Como } \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

$$\text{Logo } \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+cb} \geq \frac{9}{3+ab+ac+bc} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{2}.$$

Questão 15 (Espanha 1985)

Seja n inteiro positivo. Prove que $(n+1)(n+2) \cdots (2n-1) \cdot 2n$ é divisível por 2^n .

Solução

Faça por indução:

- i) Para $n = 1$, temos que $2 \mid 2$.
- ii) Suponha válida a propriedade para $n=k$, isto é, $(k+1)(k+2) \cdots 2k$ é divisível por 2^n (H.I).
- iii) Provemos que vale para $n = k + 1$.

$$(k+2)(k+3) \cdots 2k \cdot (2k+1)(2k+2)$$

Daí temos dois casos a analisar:

Primeiro caso: se k for par.

Neste caso, $(k+2)(k+3) \cdots 2k \cdot (2k+1)(2k+2)$ tem os mesmo fatores 2 de $(k+1)(k+2) \cdots 2k$ com o acréscimo de pelo menos um fator 2 de $2k+2$.

Segundo Caso: se k for ímpar.

Neste caso, $(k+2)(k+3) \cdots 2k \cdot (2k+1)(2k+2)$ tem os mesmo fatores 2 de $(k+1)(k+2) \cdots 2k$ com o acréscimo de um fator 2, pois retiramos o $k+1$ e acrescentamos o número de $2k+2 = 2 \cdot (k+1)$.

Questão 16 (Estados Unidos 1979)

Determine inteiros não negativos $(n_1, n_2, \dots, n_{14})$ tais que $n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{14}^4 = 1599$.

Solução

n é par, $n=2q$, sendo q um número natural, daí $n^4=16q^4$, o que deixa resto zero na divisão por 16. E se n é ímpar $n=2p+1$, onde p é um número natural, daí $n^4 = 16p^4 + 32p^3 + 24p^2 + 8p + 1 = 16(p^4 + 2p^3) + 8p(3p+1) + 1$. Assim, se p é par, $16(p^4 + 2p^3) + 8p(3p+1)$ é múltiplo de 16, já que $8p$ é múltiplo de 16; se n é ímpar, $3p+1$ é par. Logo, $16(p^4 + 2p^3) + 8p(3p+1)$ é múltiplo de 16. Em qualquer caso, temos que n^4 deixa resto zero ou 1 na divisão por 16. Logo, $(n_1)^4 + (n_2)^4 + \dots + (n_{14})^4$ tem resto entre 0 e 14 na divisão por 16; 1599 tem resto 15 na divisão por 16. Portanto, a equação não tem solução.

Questão 17 (IMO 1975)

Sejam $n = 4444^{4444}$, **A** a soma dos dígitos de n e **B** a soma dos dígitos de **A**. Calcule a soma dos dígitos de **B**.

Solução

Note que $4444 < 10^4$, ou seja, $(4444)^{4444} < (10^4)^{4444}$. Logo n tem menos de 17776 dígitos. Como $A < 9 \cdot 17776 = 156984$, $A < 10^6$. Assim, $B \leq 54$ e a soma dos dígitos de B é no máximo 13.

Agora temos $n \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow n^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow (n^3)^{1481} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow n^{4443} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow n^{4444} \equiv 7 \pmod{9}$. E como $n \equiv A \equiv B \pmod{9}$, temos que $B \equiv 7 \pmod{9}$. Desse modo, a soma dos dígitos de B é 7.

Questão 18 (Putnam 1948)

Seja n um número inteiro positivo, prove que: $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Solução

Lema: Para todo n natural $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+3}$.

Prova:

Primeira Parte: Provar que $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

Prova:

Como os números são todos positivos, podemos elevar ao quadrado, isto é, $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow 4n+1 < 2n+1 + 2\sqrt{n \cdot (n+1)} \Leftrightarrow n < \sqrt{n \cdot (n+1)}$ o que é verdade.

Segunda Parte: Provar que $\sqrt{4n+3} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

Prova:

Como os números são todos positivos, podemos elevar ao quadrado, isto é, $\sqrt{4n+3} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow 4n+3 > 2n+1 + 2\sqrt{n \cdot (n+1)} \Leftrightarrow n+1 > \sqrt{n \cdot (n+1)}$ o que é verdade.

Como $\sqrt{4n+2}$ e $\sqrt{4n+3}$ não são inteiros, pois um quadrado perfeito é congruente a 0 ou 1 módulo 4, logo $\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.

Questão 19 (Suécia)

Sejam x, y, z números inteiros positivos tais que $x^y = z$, $y^z = x$, $z^x = y$, prove que $x = y = z = 1$.

Solução

Vamos analisar 3 casos:

Caso 1: $x = \text{Máx} \{x, y, z\}$

Como $x^y = z$, logo $y \leq 1$, portanto $y = 1$.

Como $z^x = y \Rightarrow z = 1$, portanto $x = y = z = 1$.

Caso 2: $y = \text{Máx} \{x, y, z\}$

Analogamente ao caso 1, temos como solução apenas $x = y = z = 1$.

Caso 3: $z = \text{Máx} \{x, y, z\}$

Analogamente ao caso 1, temos como solução apenas $x = y = z = 1$.

Solução: $\{(x, y, z) = (1, 1, 1)\}$

Questão 20 (Torneio das Cidades 1993)

Três pilhas de carochos são dadas sobre uma mesa. É permitido adicionar ou remover de uma pilha um número de carochos que é igual à soma do número de carochos das outras duas pilhas. Por exemplo, $[12, 3, 5]$ pode tornar-se $[12, 20, 5]$ pela adição de $17 = 12 + 5$ para a pilha de 3 ou tornar-se $[4, 3, 5]$ pela remoção de $8 = 3 + 5$ carochos da pilha com 12.

É possível, iniciando com pilhas possuindo 1993, 199 e 19 carochos, conseguir uma pilha vazia depois de uma sequência de operações permitidas?

Solução

Como os 3 números iniciais são ímpares, qualquer movimento vai ser adicionado ou subtraído um número par ao número já existente, logo os 3 números serão sempre ímpares, portanto sendo impossível termos uma pilha vazia.

Questão 21) (IMO 1970)

Encontre todos os n naturais com a seguinte propriedade: O conjunto $C = \{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ pode ser dividido em dois subconjuntos A e B tais que $A \cup B = C$ e $A \cap B = \emptyset$ e o produto dos elementos do conjunto A é igual ao produto dos elementos do conjunto B .

Solução

Sejam a o produto dos elementos de A e b o produto dos elementos de B . Se $n \equiv 0, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7}$, teremos exatamente um número (a ou b) com fator 7, portanto teremos o produto dos números (a ou b) sendo múltiplo de 7 e outro que não é múltiplo de 7, absurdo. Se $n \equiv 1 \pmod{7}$, então $ab \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{7}$. Entretanto, se os dois conjuntos tivessem produtos iguais, teríamos $ab \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{7}$ ou $ab \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{7}$ ou $ab \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7}$ ou $ab \equiv 4 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{7}$ ou $ab \equiv 5 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{7}$ ou $ab \equiv 6 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{7}$, em nenhum caso temos $ab \equiv 6 \pmod{7}$. Portanto, isso é impossível.

Questão 22 (Cone Sul 1992)

Prove que não existem x, y, z inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Solução

Vamos analisar os casos:

Sejam (a, b, c) uma solução, então:

Caso 1: x e y não são múltiplos de 3.

Neste caso temos que $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ e $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, logo $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{3}$, absurdo, pois $3z^2$ é múltiplo de 3. Logo neste caso não há solução.

Caso 2: Um dos números é múltiplo de 3 e o outro não é múltiplo de 3.

Neste caso temos que $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{3}$, absurdo, pois $3z^2$ é múltiplo de 3.

Caso 3: Os dois números são múltiplos de 3.

Neste caso suponhamos, por absurdo, que (a, b, c) seja uma solução onde a é mínimo. Então $a = 3m$, $b = 3n$, logo $9m^2 + 9n^2 = 3c^2$.

Se c é múltiplo de 3, então $c = 3p$. Assim temos que $9m^2 + 9n^2 = 27p^2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 3p^2$, absurdo, pois $m < a$. Logo a equação não tem solução.

Questão 23 (Rússia 1968)

Qual o maior dos números: 31^{11} ou 17^{14} ?

Solução

Note que $17 > 2^4$, logo $17^{14} > 2^{56}$ e $31 < 2^5$, logo $31^{11} < 2^{55}$, assim $17^{14} > 2^{56} > 2^{55} > 31^{11}$, portanto $17^{14} > 31^{11}$.

Questão 24 (Estados Unidos 1976)

Encontre todos os inteiros a, b e c tais que $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$.

Solução

Vamos analisar os casos:

Sejam (a, b, c) uma solução, então:

Caso 1: Três números ímpares.

Neste caso temos $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod{4}$ e $a^2b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, absurdo!!!

Caso 2: Dois números ímpares e um número par.

Neste caso temos $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}$ e $a^2b^2 \equiv 0 \pmod{4}$, absurdo!!!

Caso 3: Dois números pares e um número ímpar.

Neste caso temos $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod{4}$ e $a^2b^2 \equiv 0 \pmod{4}$, absurdo!!!

Caso 4: Três números pares.

Neste caso suponhamos, por absurdo, que (a, b, c) seja uma solução onde a é mínimo, então $a = 2m$, $b = 2n$ e $c = 2p$, daí é fácil ver que (m, n, p) também é solução, onde $m < a$, absurdo!, logo a única solução é $(0, 0, 0)$.

Questão 25 (Rússia)

Sejam a, b, c, d números reais positivos, tais que $abcd = 10$. Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Solução 1

Seja $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$ e $T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Como $M.A \geq M.G$, temos que:

$$\frac{S}{10} \geq \sqrt[10]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd}$$

Logo $S \geq 10$.

Solução 2

Como $M.A \geq M.G$, temos que:

$$\frac{ab + cd}{2} \geq \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \Rightarrow ab + cd \geq 2 \Rightarrow \frac{ac + bd}{2} \geq \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \Rightarrow ac + bd \geq 2$$

$$\frac{bc + ad}{2} \geq \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \Rightarrow bc + ad \geq 2 \Rightarrow \frac{T}{4} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} \Rightarrow T \geq 4$$

Somando as parcelas membro a membro temos que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Questão 26 (São Petersburgo 1998)

Em quantos zeros pode acabar o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ para n natural?

Solução

A resposta é 2. Para $n = 1$, temos $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 10$; para $n = 2$, temos $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 30$ e se $n = 3$, temos $1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 100$.

Se $n \geq 3$, não podemos ter 3 ou mais zeros, uma vez que 2^n e 4^n são múltiplos de 8.

E $1^n + 3^n \equiv 2 \pmod{8}$ se n é par e $1^n + 3^n \equiv 4 \pmod{8}$, se n é ímpar, portanto $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ não é múltiplo de 8, assim não pode ser múltiplo de 1000.

Questão 27 (Espanha 2008)

Qual o maior dos números: $999!$ ou 500^{999} . Justifique.

Solução 1

Seja $A = 999!$ e $B = 500^{999}$, então

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \left(\frac{500-499}{500} \right) \left(\frac{500-498}{500} \right) \left(\frac{500-497}{500} \right) \cdots \left(\frac{500+497}{500} \right) \left(\frac{500+498}{500} \right) \left(\frac{500+499}{500} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{499}{500} \right) \left(1 - \frac{498}{500} \right) \left(1 - \frac{497}{500} \right) \cdots \left(1 + \frac{497}{500} \right) \left(1 + \frac{498}{500} \right) \left(1 + \frac{499}{500} \right) = \\ &= \left(1 - \left(\frac{499}{500} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{498}{500} \right)^2 \right) \cdots \left(1 - \left(\frac{497}{500} \right)^2 \right) \cdots \left(1 - \left(\frac{2}{500} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{500} \right)^2 \right) < 1, \\ \text{logo } A &< B. \end{aligned}$$

Solução 2

Por média aritmética maior ou igual à média geométrica (neste caso a desigualdade é estrita, pois os termos são diferentes), temos que:

$$\frac{1+2+\dots+999}{999} > \sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 998 \cdot 999} \Rightarrow \frac{1000 \cdot 999}{999} > \sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 998 \cdot 999} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500 > \sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 998 \cdot 999} \Rightarrow 500^{999} > 999!$$

Questão 28 (Moldávia 1999)

Ache todos os números reais $x_1, x_2, \dots, x_{1999}$ tais que:

$$1 + (x_1)^2 = 2x_2; \quad 1 + (x_2)^2 = 2x_3; \quad 1 + (x_3)^2 = 2x_4; \quad \dots; \quad 1 + (x_{1999})^2 = 2x_1.$$

Solução:

Claramente $x_1, x_2, \dots, x_{1999}$ são todos positivos, logo por M.A $\geq$ M.G temos que:

$$1 + (x_1)^2 \geq 2x_2 \Rightarrow x_2 \geq x_1;$$

$$1 + (x_2)^2 \geq 2x_3 \Rightarrow x_3 \geq x_2;$$

$$1 + (x_3)^2 \geq 2x_4 \Rightarrow x_4 \geq x_3;$$

.....

$$1 + (x_{1999})^2 \geq 2x_1 \Rightarrow x_{1999} \geq x_1 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{1997} \geq x_{1998} \geq x_{1999} \geq x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{1998} = x_{1999} = a.$$

Daí temos que:

$$1 + (a)^2 = 2a \Rightarrow a = 1, \text{ logo a única solução é } x_1 = x_2 = \dots = x_{1999} = 1.$$

Questão 29 (Leningrado 1989)

Existem $n \geq 2$ números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números **a** e **b** e trocá-los por $a + \frac{b}{2}$ e $b - \frac{a}{2}$. Prove que, após feito um movimento, não podemos obter os números iniciais novamente.

Solução

Sejam a, b números iniciais, após o movimento teremos $a + \frac{b}{2}$ e $b - \frac{a}{2}$, daí

note que $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$, portanto a soma dos quadrados dos números sempre aumenta após cada movimento, logo não podemos voltar aos números iniciais.

Questão 30 (Balcânica)

Prove que o número 11...1122...225, formado por 1997 algarismos 1 e 1998 algarismos 2, é um quadrado perfeito.

Solução

$$\begin{aligned}
 11...1122...225 &= \\
 &= 5 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4 + \dots + 2 \cdot 10^{1998} + 1 \cdot 10^{1999} + 1 \cdot 10^{2000} + \\
 &+ 1 \cdot 10^{2001} + \dots + 1 \cdot 10^{3996} = 5 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot (10^{1999} - 10) + 1 \cdot \frac{1}{9} \cdot (10^{3996} - 10^{1999}) = \\
 &= 5 + 10^{1999} = \frac{1}{9} \cdot (10^{3996} + 10^{1999} + 25) = \left[\frac{1}{3} \cdot (10^{1996} + 5) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Questão 31 (Torneio das cidades 1985)

Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia haver a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Solução

Sejam r = quantidade de camaleões roxos; v = quantidade de camaleões verdes e a = quantidade de camaleões amarelos. Temos 3 casos a analisar:

Caso 1: Há o encontro de um camaleão verde e um roxo.

Neste caso, antes do encontro tínhamos a , r , v e após o encontro teremos $a + 2$, $r - 1$, $v - 1$. Assim as diferenças são:

Antes $a - r = k$ e depois $(a + 2) - (r - 1) = k + 3$

Antes $a - v = t$ e depois $(a + 2) - (v - 1) = t + 3$

Antes $v - r = s$ e depois $(v - 1) - (r - 1) = s$

Em qualquer caso, a diferença ou fica inalterada ou aumenta em 3.

Caso 2: Há o encontro de um camaleão amarelo e um roxo.

Neste caso, antes do encontro tínhamos a , r , v e após o encontro teremos $a - 1$, $r - 1$, $v + 2$. Assim as diferenças são:

Antes $a - r = k$ e depois $(a - 1) - (r - 1) = k$

Antes $a - v = t$ e depois $(a - 1) - (v + 2) = t - 3$

Antes $v - r = s$ e depois $(v + 2) - (r - 1) = s + 3$

Em qualquer caso, a diferença ou fica inalterada ou aumenta ou diminui em 3.

Caso 3: Há o encontro de um camaleão verde e um amarelo.

Neste caso, antes do encontro, tínhamos a , r , v e após o encontro teremos $a - 1$, $r + 2$, $v - 1$. Assim as diferenças são:

Antes $a - r = k$ e depois $(a - 1) - (r + 2) = k - 3$

Antes $a - v = t$ e depois $(a - 1) - (v - 1) = t$

Antes $v - r = s$ e depois $(v - 1) - (r + 2) = s - 3$

Em qualquer caso, a diferença ou fica inalterada ou aumenta ou diminui em 3. Assim, o resto da divisão por 3 das diferenças não se altera após qualquer uma das 3 operações. Inicialmente temos $r = 13$, $v = 15$ e $a = 17$, daí $a - r = 4$, $a - v = 2$ e $v - r = 2$. Se chegarmos em algum momento a ter todos com a mesma cor, então teríamos dois valores (dos 3 valores a , r , v) sendo zero. Portanto a diferença seria zero, absurdo, pois nenhuma das diferenças iniciais é múltiplo de 3.

Questão 32 (Balcânica)

Sejam x , y números inteiros tais que:

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Prove que $x + y = 10$.

Solução

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 30xy = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (x^3 + y^3) - 3x^2y - 3xy^2 + 30xy = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (x^3 + y^3) - 3x^2y - 3xy^2 + 30xy - 2000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot [(x^3 + y^3) - 1000] - 3xy \cdot (x + y - 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y - 10) \cdot [2 \cdot ((x + y)^2 + 10 \cdot (x + y) + 100) - 3xy] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y - 10) = 0 \text{ ou } [2 \cdot ((x + y)^2 + 10 \cdot (x + y) + 100) - 3xy] = 0.$$

Note que $2 \cdot ((x + y)^2 + 10 \cdot (x + y) + 100) - 3xy > 0$, pois $2 \cdot ((x + y)^2 + 10 \cdot (x + y) + 100) - 3xy = \frac{1}{2} [x^2 + y^2 + (x + y)^2] + (x + 10)^2 + (y + 10)^2$, logo $(x + y - 10) = 0$, assim $x + y = 10$.

Questão 33 (Hungria-Israel)

Encontre todos os inteiros positivos x , y tais que $5^x - 3^y = 16$.

Solução

É fácil ver que $5^x \equiv 1 \pmod{3}$ se, e somente se x é par, logo $x = 2a$.

Analogamente $3^y \equiv 1 \pmod{4}$ se e somente se y é par, assim $y = 2b$.

$$\text{Assim } 5^x - 3^y = 16 \Rightarrow (5^a - 3^b) \cdot (5^a + 3^b) = 16.$$

Daí os únicos inteiros cujo produto é 16 são $(1, 16)$, $(2, 8)$, $(4, 4)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$.

Como $(5^a - 3^b) < (5^a + 3^b)$, temos que $(5^a - 3^b) = 1$ ou 2 , daí $(5^a + 3^b) = 16$ ou 8 respectivamente.

Resolvendo estes sistemas, temos $a = b = 1$, logo $x = y = 2$.

Questão 34 (Asian Pacific 1998)

Mostre que não existem inteiros positivos **a** e **b** tais que $(36a + b) \cdot (36b + a)$ seja uma potência de 2.

Solução 1

Se $(36a + b) \cdot (36b + a)$ é uma potência de 2, então $(36a + b)$ e $(36b + a)$ são potências de 2 maiores que 36.

Dai $(36a + b)$ e $(36b + a)$ são pares, logo **a** e **b** são pares. Agora seja **S** o conjunto de pares **(a, b)** tais que $(36a + b) \cdot (36b + a)$ seja uma potência de 2. Se **S** não é vazio então **S** possui um par **(a, b)** tal que **a** é mínimo. Como **a** e **b** são pares, então $a = 2c$ e $b = 2d$, logo $4 \cdot (36c + d) \cdot (36d + c)$ é uma potência de 2. Temos então, $(36c + d) \cdot (36d + c)$ é uma potência de 2, onde $c < a$, absurdo!

Solução 2

Suponhamos, por absurdo, que existisse tal solução (a, b) e esta fosse $d = \text{mdc}(a, b)$. Essa solução leva $a = dA$ e $b = dB$, onde $\text{mdc}(A, B) = 1$, daí $(36c + d) \cdot (36d + c) = d^2 \cdot (36A + B) \cdot (36B + A)$.

Note que **d** é uma potência de 2, pois se **d** tivesse um fator ímpar, então $(36c + d) \cdot (36d + c)$ teria um fator ímpar, absurdo.

Então $(36A + B) \cdot (36B + A)$ é uma potência de 2, o que leva a $(36A + B) = 2^n$ e $(36B + A) = 2^m$, onde $m > 5$ e $n > 5$; logo, $2^5 | (36A + B)$ e $2^5 | (36B + A)$; portanto, $2^5 | (36A + B) + (36B + A) = 37(A + B)$. Ou seja, $2^5 | (A + B)$.

Assim, $(A + B)$ é par e $\text{mdc}(A, B) = 1$. Se **A** e **B** são ímpares, $(36A + B)$ e $(36B + A)$ são ímpares, absurdo!

Questão 35 (Bélgica)

Prove que: $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Solução

Primeira Parte: Provar que $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Prova:

Seja $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99}$ e $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$.

Note que $A < B$, pois

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}; \frac{4}{5} > \frac{3}{4}; \dots; \frac{98}{99} > \frac{99}{100} \Rightarrow A^2 < A \cdot B = \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{10}.$$

Obs: Nesta parte, usamos o seguinte fato: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.

Tal fato é verdade, pois $(n+1) \cdot (n+1) > n \cdot (n+2)$.

Segunda Parte: Provar que $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100}$.

Prova:

Seja $B < 2A$, pois $\frac{2}{3} < 1$; $\frac{4}{5} < \frac{3}{2}$; ..., $\frac{98}{99} < \frac{99}{50}$. Temos, então, que:

$$A \cdot B < 2A^2 \Rightarrow A^2 > \frac{1}{200} \Rightarrow A > \frac{1}{15}.$$

Questão 36 (Torneio das cidades 1994)

Sejam a, b, c, d quatro inteiros positivos, tais que $ad = bc$. Prove que $a + b + c + d$ não pode ser primo.

Solução

$$a \cdot (a + b + c + d) = a^2 + ab + ac + ad = a^2 + ab + ac + bc = a \cdot (a + b) + c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (a + c).$$

Se $(a + b + c + d)$ fosse primo,

$$(a + b + c + d) \mid a + b \quad \text{ou} \quad (a + b + c + d) \mid a + c,$$

o que seria impossível, uma vez que:

$$a + b < a + b + c + d \quad \text{e} \quad a + c < a + b + c + d.$$

Logo, $a + b + c + d$ é composto.

Questão 37 (Baltic Way 1997)

Encontre todas as triplas (a, b, c) de inteiros não-negativos satisfazendo $a \geq b \geq c$ e tais que $a^3 + 9b^2 + 9c = 1997$.

Solução

$$1997 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow a^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv 1, 4, 7 \pmod{9}.$$

$$13^3 = 2197 > 1997; a \leq 13, a = 1, 4, 7, 10.$$

Considerando que $a \leq 7$ e que $a \geq b \geq c$,

$$a^3 + 9b^2 + 9c \leq 7^3 + 9 \cdot 7^2 + 9 \cdot 7 = 847 < 1997,$$

$a = 10$ é a única possibilidade, daí $9b^2 + 9c = 990$. Como $10 \geq b \geq c$, temos que $9b^2 + 9c \leq 990$. Se $b = c = 10$, a tripla $(10, 10, 10)$ é única solução.

Questão 38 (África do Sul)

Resolva a equação: $36x^4 + 36x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = 0$.

Solução

Por inspeção, é fácil ver que -1 é raiz. Então $36x^4 + 36x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = 0$ é divisível por $x + 1$. Dividindo $36x^4 + 36x^3 - 7x^2 - 6x - 1$ por $x + 1$, temos como resultado $36x^3 - 7x + 1$, ou seja:

$$36x^4 + 36x^3 - 7x^2 - 6x - 1 = (x + 1) \cdot (36x^3 - 7x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (x+1) \cdot [(36x^3 - x) - (6x - 1)] = 0 \Rightarrow (x+1) \cdot [x(36x^2 - 1) - (6x - 1)] = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (x+1) \cdot [x(6x-1)(6x+1) - (6x-1)] = 0 \Rightarrow (x+1)(6x-1)(6x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{6} \text{ ou } x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Questão 39 (Grécia 2002)

Prove que $2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$.

Solução 1

$$2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002} \Leftrightarrow 2^{2002} \cdot 2002! < (2003)^{2002} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2002} \cdot 2002! < 2003 \cdot 2003 \cdot 2003 \cdots 2003 \text{ (2002 parcelas 2003)}.$$

Note que:

$$\begin{aligned}
 A = & (2^{10} \cdot 1) \cdot (2^9 \cdot 2) \cdot (2^9 \cdot 3) \cdot (2^8 \cdot 4) \cdot (2^8 \cdot 5) \cdot (2^8 \cdot 6) \cdot (2^8 \cdot 7) \cdot (2^7 \cdot 8) \cdot (2^7 \cdot 9) \cdots \\
 & \cdots (2^7 \cdot 15) \cdot (2^6 \cdot 16) \cdot (2^6 \cdot 17) \cdots (2^6 \cdot 31) \cdot (2^5 \cdot 32) \cdot (2^5 \cdot 33) \cdots (2^5 \cdot 62) \cdot (2^4 \cdot 63) \cdots \\
 & \cdots (2^4 \cdot 125) \cdot (2^3 \cdot 126) \cdots (2^3 \cdot 250) \cdot (2^2 \cdot 251) \cdots (2^2 \cdot 500) \cdot (2^1 \cdot 501) \cdots \\
 & \cdots (2^1 \cdot 1001) \cdot (1 \cdot 1002) \cdot (1 \cdot 1003) \cdots (1 \cdot 2002)
 \end{aligned}$$

é menor do que $(2003)^{2002}$, pois cada uma das 2002 parcelas é menor do que 2003. Logo,

$$2^{1995} \cdot 2002! = A < (2003)^{2002}.$$

Note também que:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1002 \cdot 1003) &= 2004 \cdot 1003 = (2003 + 1) \cdot 1003 = \\
 &= 2003 \cdot 1003 + 1003 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1003 + 2003 \cdot 1000;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1004 \cdot 1005) &= 2008 \cdot 1005 = (2003 + 5) \cdot 1005 = \\
 &= 2003 \cdot 1005 + 5 \cdot 1005 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1005 + 2003 \cdot 998;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1006 \cdot 1007) &= 2012 \cdot 1007 = (2003 + 9) \cdot 1007 = \\
 &= 2003 \cdot 1007 + 9 \cdot 1007 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1007 + 2003 \cdot 996;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1008 \cdot 1009) &= 2016 \cdot 1009 = (2003 + 13) \cdot 1009 = \\
 &= 2003 \cdot 1009 + 13 \cdot 1009 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1009 + 2003 \cdot 994;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1010 \cdot 1011) &= 2020 \cdot 1011 = (2003 + 17) \cdot 1011 = \\
 &= 2003 \cdot 1011 + 17 \cdot 1011 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1011 + 2003 \cdot 992;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1012 \cdot 1013) &= 2024 \cdot 1013 = (2003 + 21) \cdot 1013 = \\
 &= 2003 \cdot 1013 + 21 \cdot 1013 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1013 + 2003 \cdot 990;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (1014 \cdot 1015) &= 2028 \cdot 1015 = (2003 + 25) \cdot 1015 = \\
 &= 2003 \cdot 1015 + 25 \cdot 1015 < 2003 \cdot 2003 = 2003 \cdot 1015 + 2003 \cdot 988; \text{ logo } 2^7.
 \end{aligned}$$

$$A < (2003)^{2002}. \text{ Assim } 2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}.$$

Solução 2

Provemos, por indução, que: $2^n \cdot n! < (n+1)^n$ para todo n natural $n > 1$.

i) Para $n = 2$, temos $2^2 \cdot 2! < (2+1)^2$;

ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$, isto é,

$$2^k \cdot k! < (k+1)^k \text{ (H.I.)}$$

iii) Vamos provar que vale para $n = k+1$;

$$2^{k+1} \cdot (k+1)! = (2^k \cdot k!) \cdot 2(k+1) < (k+1)^k \cdot 2 \cdot (k+1) =$$

$$= 2 \cdot (k+1)^{k+1} < (k+2)^{k+1}, \text{ pois } f(k) = \frac{k+2}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(1+k+1)^{k+1}}, \text{ note que}$$

$f(2) > 2$, 1 e f é crescente para todo $k \geq 2$, logo vale a desigualdade.

Solução 3

Por média aritmética maior ou igual à média geométrica (neste caso a desigualdade é estrita, pois os números são diferentes), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1+2+\dots+2001+2002}{2002} &> \sqrt[2002]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2002} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2003 \cdot 2002}{2} > \sqrt[2002]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2002} \Rightarrow 2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}. \end{aligned}$$

Questão 40 (Ucrânia 1999)

Mostre que o número $9999999 + 1999000$ é composto.

Solução

$$\begin{aligned} 9999999 + 1999000 &= 10^7 - 1 + (2 \cdot 10^3 - 1) \cdot 10^3 = \\ &= 9 \cdot 10^6 + 10^6 - 1 + 2 \cdot 10^6 - 10^3 = \\ &= 3 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 10^3 - 1) + 3 \cdot 10^6 - 10^3 + 3 \cdot 10^3 - 1 = \\ &= 3 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 10^3 - 1) + 3 \cdot 10^3(10^3 + 1) - (10^3 + 1) = \\ &= 3 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 10^3 - 1) + (3 \cdot 10^3 - 1) \cdot (10^3 + 1) = \\ &= (3 \cdot 10^3 - 1) \cdot (3 \cdot 10^3 + 10^3 + 1) = 2999 \cdot 4001. \end{aligned}$$

Questão 41 (Rússia 2002)

Um número de 4 algarismos é escrito em um quadro negro. As operações permitidas são: adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9) ou subtrair 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0). É possível obtermos 2002 a partir do número 1234 utilizando algumas operações?

Solução

Note que em cada uma das operações o resto na divisão por 11 fica invariante. Após cada operação, somamos ou subtraímos um número da forma $10^n + 10^{n+1} = 10^n \cdot (10 + 1) = 11 \cdot 10^n$. Como $2002 \equiv 0 \pmod{11}$ e $1234 \equiv 2 \pmod{11}$, é impossível chegarmos ao número 2002.

Questão 42 (Singapura 1988)

Calcule:

$$\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{98\sqrt{99} + 99\sqrt{98}} + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

Solução

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1 \cdot \sqrt{k} + k \cdot \sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2 k + k \sqrt{k^2(k+1)}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k} \cdot (k+1)} \cdot \left(\frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} \right) = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \text{ logo a soma vale} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \right) &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Questão 43 (Argentina 2008)

Ache todos os números reais x , tais que

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2008$$

Solução

Seja $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor$. Se $f(x) = 2008$, então $x \geq 0$ e f é não-decrescente. Note que $\lfloor 2x \rfloor \leq 2x < \lfloor 2x \rfloor + 1$, $\lfloor 3x \rfloor \leq 3x < \lfloor 3x \rfloor + 1$, $\lfloor 7x \rfloor \leq 7x < \lfloor 7x \rfloor + 1$. Somando as desigualdades, temos $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor \leq 2x + 3x + 7x < \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor + 3$.

Se $f(x) = 2008$, então $2008 \leq 12x < 2011$. Logo $\frac{2008}{12} \leq x < \frac{2011}{12}$.

Calculemos $f\left(\frac{2008}{12}\right) = 2007$ e $f\left(\frac{2011}{12}\right) = 2010$.

Agora façamos $g(x) = \lfloor 2x \rfloor$. Note que g é crescente, $g\left(\frac{2008}{12}\right) = 334$ e $g\left(\frac{2011}{12}\right) = 335$. Se $\frac{2008}{12} \leq x < \frac{2011}{12}$, então $g(x) = 334$ ou 335 .

Fazendo $h(x) = \lfloor 3x \rfloor$, nota-se que h é crescente e $g\left(\frac{2008}{12}\right) = 502$ e $g\left(\frac{2011}{12}\right) = 502$. Se $\frac{2008}{12} \leq x < \frac{2011}{12}$, então $h(x) = 502$.

Considerando $t(x) = \lfloor 7x \rfloor$, nota-se que t é crescente e $t\left(\frac{2008}{12}\right) = 1171$ e $t\left(\frac{2011}{12}\right) = 1173$. Se $\frac{2008}{12} \leq x < \frac{2011}{12}$, então $t(x) = 1171, 1172, 1173$.

Para que $f(x) = 2008$, temos duas possibilidades: $334 + 502 + 1172$ ou $335 + 502 + 1171$.

Caso 1: $g(x) = 334$ e $t(x) = 1172$.

Se $g(x) = 334$, então $334 \leq 2x < 335 \Rightarrow 167 \leq x < \frac{335}{2}$ e se $t(x) = 1172$, então $1172 \leq 7x < 1173 \Rightarrow \frac{1172}{7} \leq x < \frac{1173}{7}$.

Dai

$$S_1 = \left(\frac{2008}{12} \leq x < \frac{2011}{12} \right) \cap \left(167 \leq x < \frac{335}{2} \right) \cap \left(\frac{1172}{7} \leq x < \frac{1173}{7} \right) = \frac{1172}{7} \leq x < \frac{335}{2}.$$

Caso 2: $g(x) = 335$ e $t(x) = 1171$.

Se $g(x) = 335$, então $335 \leq 2x < 336 \Rightarrow \frac{335}{2} \leq x < 168$.

Se $t(x) = 1171$, então $1171 \leq 7x < 1172 \Rightarrow \frac{1171}{7} \leq x < \frac{1172}{7}$.

Dai

$$S_2 = \left(\frac{2008}{12} \leq x < \frac{2011}{12} \right) \cap \left(\frac{335}{2} \leq x < 168 \right) \cap \left(\frac{1171}{7} \leq x < \frac{1172}{7} \right) = \emptyset.$$

A solução é $\frac{1172}{7} \leq x < \frac{335}{2}$, onde x é um número real.

Questão 44 (Argentina 1997)

Ache todos os números naturais n tais que $\left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor$ seja um número primo.

Solução

Vamos usar congruência módulo 5:

Caso 1: $n \equiv 0 \pmod{5}$.

Neste caso, $n = 5a \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot n^2 = 5 \cdot a^2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = 5 \cdot a^2$. Logo, $\left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor$ é primo se e somente se $a = 1$, isto é $n = 5$.

Caso 2: $n \equiv 1 \pmod{5}$.

Neste caso, $n = 5b + 1 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot n^2 = 25b^2 + 10b + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{5}(25b^2 + 10b + 1) \right\rfloor = \left\lfloor 5b^2 + 2b + \frac{1}{5} \right\rfloor = 5b^2 + 2b = b(5b + 2)$ é primo se e somente se $b = 1$ ou $5b + 2 = 1$. Portanto, a única possibilidade para este caso é $n = 6$, que de fato é solução, já que $\left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = 7$.

Caso 3: $n \equiv 2 \pmod{5}$.

Neste caso $n = 5c + 2 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot n^2 = 25c^2 + 20c + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{5}(25c^2 + 20c + 4) \right\rfloor = \left\lfloor 5c^2 + 4c + \frac{4}{5} \right\rfloor = 5c^2 + 4c = c(5c + 4)$ é primo se e somente se $c = 1$ ou $5c + 4 = 1$, portanto a única possibilidade para este caso seria $n = 7$, que não é solução, pois $\left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = 9$.

Caso 4: $n \equiv 3 \pmod{5}$.

Neste caso $n = 5d + 3 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot n^2 = 25d^2 + 30d + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{5}(25d^2 + 30d + 9) \right\rfloor = \left\lfloor 5d^2 + 6d + \frac{9}{5} \right\rfloor = 5d^2 + 6d + 1 = (d + 1)(5d + 1)$ é primo se e somente se $d + 1 = 1$ ou $5d + 1 = 1$, portanto a única possibilidade para este caso é $n = 3$, que de fato é solução.

Caso 5: $n \equiv 4 \pmod{5}$.

Neste caso $n = 5m + 4 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot n^2 = 25m^2 + 40m + 16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{5} \cdot n^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{5} (25m^2 + 40m + 16) \right\rfloor = \left\lfloor 5m^2 + 8m + \frac{16}{5} \right\rfloor = 5m^2 + 8m + 3 = (m+1)(5m+3)$$

é primo se e somente se $m+1 = 1$ ou $5m+3 = 1$.

Portanto, a única possibilidade para este caso é $n = 4$, que de fato é solução.

Questão 45 (Cone Sul 1996)

Considere a sequência de números reais positivos $a_0, a_1, a_2, \dots$ definida por:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \text{ para todo inteiro } n \geq 0.$$

Mostre que, para qualquer de valor de a_0 , sempre se tem $a_{1996} > 63$.

Solução

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \Rightarrow (a_{n+1})^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{1}{a_n} \right)^2 + 2 \Rightarrow (a_1)^2 = (a_0)^2 + \left(\frac{1}{a_0} \right)^2 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1)^2 > 2 = 2 \cdot 1.$$

$$(a_2)^2 = (a_1)^2 + \left(\frac{1}{a_1} \right)^2 + 2 \Rightarrow (a_2)^2 > 2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2.$$

$$(a_3)^2 = (a_2)^2 + \left(\frac{1}{a_2} \right)^2 + 2 \Rightarrow (a_3)^2 > 4 + 2 = 6 = 2 \cdot 3, \dots$$

Procedendo dessa maneira, temos que, de modo geral, $(a_n)^2 > 2n$. Provemos por indução:

i) Vale para $n = 1, 2, 3$.

ii) Suponhamos a propriedade vale para $n = k$.

$$(a_k)^2 > 2 \cdot k$$

iii) Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

$$(a_{k+1})^2 = (a_k)^2 + \left(\frac{1}{a_k} \right)^2 + 2 > 2k + 2 = 2(k+1)$$

Logo, vale a propriedade para todo n natural.

Assim, $(a_{1996})^2 > 2 \cdot 1996 \Rightarrow (a_{1996}) > \sqrt{3992} > 63$.

Questão 46 (Argentina 1998)

Determine todos os valores da expressão: $x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor$.

Solução

Note que $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leq \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$; $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \leq \frac{x}{3} < \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1$; $\left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor \leq \frac{x}{6} < \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor + 1$.

Multiplicando cada uma por -1 e somando-as, temos:

$$-\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor \geq -\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} > -\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor - 3.$$

Somando x à expressão, temos:

$$x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor \geq x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} > x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor - 3,$$

Definindo $f(x) = x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor$, $f(x) \geq 0 > f(x) - 3 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 3$.

Note que se $0 \leq x < 2$, então $f(x) = x$. O intervalo $[0, 2)$ está na imagem.

Entretanto, se $x = 5 + r$, em que $0 \leq r < 1$, então $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2$, $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1$ e $\left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = 0$,

$f(x) = 2 + r$, e a solução será $[0, 3)$.

Questão 47 (Rioplatense 2005)

Encontre todos os números n , tais que n possa ser expresso na forma $n = k + 2\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor + 2$, e k seja um inteiro não negativo.

Solução

Definindo $a_k = k + 2\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor + 2$, note que:

$$a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 6, a_3 = 7, a_4 = 10, a_5 = 11, a_6 = 12, a_7 = 13, a_8 = 14, a_9 = 17.$$

Dá para desconfiar que somente os números $t^2 - 1$, t^2 não são dessa forma, sendo t natural.

Vamos provar, por indução, a seguinte propriedade: seja

$$B_0 = \{a_k; k \in \{0\}\}, B_1 = \{a_k; k \in \{1, 2, 3\}\}, B_2 = \{a_k; k \in \{4, 5, 6, 7, 8\}\}, \dots,$$

$$B_m = \{(m-1)^2, (m-1)^2 + 1, \dots, m^2 - 1\}, \dots$$

Note que se n varia dentro de um dos B_m $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ é invariante, vale sempre $m - 1$.

1. Defina $C_m = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \dots \cup B_m$.

Provemos, por indução, que C_m é o conjunto de todos os naturais menores ou iguais a $(m+1)^2$ exceto os números da forma $t^2 - 1$, t^2 , onde $t < m+1$.

Note $C_1 = \{2\}$, $C_2 = \{2, 5, 6, 7\}$, $C_3 = \{2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$. Portanto vale a propriedade para os casos iniciais.

Suponhamos a propriedade válida para $n = k$: C_k é o conjunto de todos os naturais menores ou iguais a $(m+1)^2$, exceto os números da forma $t^2 - 1$, t^2 , sendo $t < m+1$.

$$\text{daí } a_{(m-1)}^2 - 1 = k^2 - 2 \quad \text{e} \quad a_{(m-1)}^2 = k^2 + 1$$

Como dentro de $B_{k+1}[\sqrt{k}]$ é invariante, vale sempre $k+1$; somente o k vai aumentando de 1 em 1.

Como B_{k+1} tem $2k-1$ termos, serão acrescentados ao conjunto todos os números de k^2+1 até $k^2+2k-1 = (k+1)^2-2$.

Logo, a propriedade é válida para $k+1$.

Questão 48 (Argentina 2004)

Encontre todos os inteiros não-negativos a e b , tais que $3 \cdot 2^a + 1 = b^2$.

Solução

$$3 \cdot 2^a + 1 = b^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1),$$

$(b-1)$ ou $(b+1)$ são múltiplos de 3. Daí, $b = 3k+1$ ou $b = 3s-1$.

Caso 1: $b = 3k+1$.

Substituindo na equação, temos $3 \cdot 2^a = 3k \cdot (3k+2) \Rightarrow 2^a = k \cdot (3k+2)$.

Consequentemente, k e $3k+2$ são potências de 2.

Sejam $k = 2^n$ e $3k+2 = 2^m$; logo, $3 \cdot 2^n + 2 = 2^m$.

Note que se $n > 1$, então $2^n > 2$, $2^{n+2} > 3 \cdot 2^n + 2 > 2^{n+1}$. Assim, $n = 0$ ou $n = 1$.
Portanto $k = 1$ ou $k = 2$; $b = 4$ ou $b = 7$.

Dessa maneira, $a = 4$ é a única solução.

Caso 2: $b = 3s-1$.

Substituindo na equação, temos $3 \cdot 2^a = (3s) \cdot (3s-2) \Rightarrow 2^a = s \cdot (3s-2)$. Assim, s e $3s-2$ são potências de 2.

Seja $s = 2^p$ e $3s-2 = 2^q$; então $3 \cdot 2^p - 2 = 2^q$.

Note que se $p > 1$, então $2^p > 2$ e $2^{p+2} > 3 \cdot 2^p - 2 > 2^{p+1}$. Dessa maneira, $p = 0$ ou $p = 1$.

Portanto, $s = 1$ ou $s = 2$. Logo, $b = 2$ ou $b = 5$; $a = 0$ ou $a = 3$ serão as soluções.

Soluções: $(a, b) = \{(0, 2), (3, 5), (4, 7)\}$.

Questão 49 (Mercosul 1997)

Calcule a soma: $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{1996} \rfloor + \lfloor \sqrt{1997} \rfloor$.

Solução

Seja $S = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{1996} \rfloor + \lfloor \sqrt{1997} \rfloor$.

Observe que se $k^2 \leq x < (k+1)^2$, então $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = k$.

É fácil ver que de k^2 até $(k+1)^2 - 1$, temos $2k+1$ números naturais.

Então:

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + 43 \cdot 87 + 44 \cdot [(1997 - 44^2) + 1] =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{43 \cdot 44 \cdot 87}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot (43) \cdot (44) + 44 \cdot 62 = 58542.$$

Nota: Para calcular essa soma, note que cada parcela, exceto a última e da forma $n(2n+1) = 2n^2 + n$, use a fórmula da soma dos quadrados

$\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ e a fórmula da soma dos n primeiros números naturais

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).$$

Questão 50 (Argentina 1995)

Para cada inteiro positivo n , seja $p(n)$ o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos, tais que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

- Determine $p(n)$ para todo n e calcular $p(1995)$.
- Determinar todos os pares n tais que $p(n) = 3$.

Solução

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} &\Leftrightarrow \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \cdot (x+y) = x \cdot y \Leftrightarrow -n \cdot x - n \cdot y + x \cdot y + n^2 = n^2 \Leftrightarrow \\ (x-n) \cdot (y-n) &= n^2. \end{aligned}$$

Seja $p(n)$ = número de divisores de n^2 , $p(1995) = 81$, uma vez que:

$$1995^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$$

b) Note que se $n = t^1$, onde t é primo, então $p(n) = 3$. Porém, se $n = t^k$, sendo $k > 1$, então $p(n) > 5$. E se n tem dois ou mais fatores primos, então $p(n)$ é um número composto, não podendo ser 3.

$p(n) = 3$ se, e somente se, $n = t^1$, onde t é um número primo.

Questão 51 (Torneio das cidades 1997)

Sejam a, b inteiros positivos tais que $a^2 + b^2$ é divisível por ab . Prove que $a = b$.

Solução

Como $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ é inteiro, $\frac{a^2 + b^2}{ab} - 2$ é inteiro, $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}$ é inteiro.

Portanto, $\frac{(a - b)^2}{ab}$ é inteiro.

Seja $d = \text{mdc}(a, b)$; $a = d \cdot m$ e $b = d \cdot n$, em que $\text{mdc}(m, n) = 1$.

Como $\frac{(a - b)^2}{ab}$ é inteiro, então $\frac{(m - n)^2}{mn}$ é inteiro.

Provemos que $m = n = 1$.

Se $m > 1$, então existe um primo p , tal que $p|m$. Sendo assim, $p | (m - n)^2 \Rightarrow p | m - n \Rightarrow p | n$, absurdo, já que o $\text{mdc}(m, n) = 1$. Dessa forma, temos que $m = 1$. Analogamente, provamos que $n = 1$.

Consequentemente, temos que $m = n = d$.

Questão 52 (Eslovênia 2002)

Achar o menor número natural que é soma de 9 naturais consecutivos, soma de 10 naturais consecutivos e soma de 11 naturais consecutivos.

Solução

Seja n um número natural que satisfaz as condições do enunciado. Então:

$n = (k - 4) + (k - 3) + (k - 2) + (k - 1) + (k) + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) = 9k$,
sendo k número natural e n múltiplo de 9. Analogamente, n é múltiplo de 11.

Da mesma forma, $n = (t) + (t + 1) + (t + 2) + (t + 3) + (t + 4) + (t + 5) + (t + 6) + (t + 7) + (t + 8) + (t + 9) = 10t + 45 = 5 \cdot (2t + 9)$.

Portanto, n é múltiplo de $5 \cdot 9 \cdot 11 = 495$.

Note qualquer múltiplo de 495, o que não satisfaz os dois primeiros números. O problema reduz-se agora a $5 \cdot 9 \cdot 11s = 5(2t + 9) \Rightarrow 99s = 2t + 9$.

$2t$ é múltiplo de 9: então $t = 9$. Logo, o menor número natural que satisfaz as condições é $5 \cdot 9^2 \cdot 11$.

Questão 53 (Bielorússia 1998)

Existem números inteiros x, y tais que $3x^2 - 2y^2 = 1998$.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que exista um par (x, y) tal que $3x^2 - 2y^2 = 1998$. Como $3 \mid 1998$ e $3 \mid 3x^2$, então $3 \mid 2y^2$, portanto, $3 \mid y$ e $y = 3a$, sendo a inteiro.

$$3x^2 - 18a^2 = 1998 \Rightarrow x^2 - 6a^2 = 666.$$

Agora note que $3 \mid 6a^2$ e $3 \mid 666$; o que será $3 \mid x^2$, seguido de $3 \mid x$. Assim, $x = b$, sendo b inteiro. Temos então que $9b^2 - 6a^2 = 666 \Rightarrow 3b^2 - 2a^2 = 222$.

Agora note $3 \mid 3b^2$ e $3 \mid 222$, logo $3 \mid 2a^2$. Em seguida, temos $3 \mid a$. Assim, $a = 3c$, onde c é inteiro.

$$\text{Logo temos que } 3b^2 - 18c^2 = 222 \Rightarrow b^2 - 6c^2 = 74.$$

Agora note que $2 \mid 6c^2$ e $2 \mid 74$, o que leva a $2 \mid b^2$. Assim, $b = 2d$, sendo d inteiro.

$$\text{Logo temos que } 4d^2 - 6a^2 = 74 \Rightarrow 2d^2 - 3a^2 = 37, \text{ absurdo, pois } 37 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } 2d^2 - 3a^2 \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{3}.$$

Essa equação não tem solução.

Questão 54 (Inglaterra 1995)

Prove que $[(mn)!]^2$ é divisível por $(m!)^{n+1} \cdot (n!)^{m+1}$, para quaisquer m, n naturais.

Solução

Lema: O número de formas que podemos dispor $m \cdot n$ pessoas em m grupo de

$$n \text{ pessoas é } \frac{(mn)!}{n!(m!)^n}.$$

Prova: Primeiro colocamos as $m \cdot n$ pessoas em uma fila com $m \cdot n$ espaços, como mostra o exemplo abaixo:

$$\{(1), (2), \dots, (m)\}, \{(m+1), (m+2), \dots, (2m)\}, \dots, \{(m \cdot n - m + 1), (m \cdot n - m + 2), \dots, (m \cdot n)\}.$$

Cada uma das $m \cdot n$ permutações dá origem a uma divisão das pessoas em n grupos de m pessoas, porém a ordem das pessoas dentro de um grupo é irrelevante e também a ordem dos grupos é irrelevante, logo devemos dividir esse número por: $m! \cdot m! \dots m! \cdot n!$, onde aparece $m!$ n vezes, logo a resposta é:

$$\frac{(mn)!}{n!(m!)^n}$$

Agora vamos ao nosso problema:

Pelo lema, $\frac{(mn)!}{n!(m!)^n}$ é inteiro e $\frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$ também é inteiro.

Logo, $\frac{(mn)!}{n!(m!)^n} \cdot \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$ é inteiro e $[(m \cdot n)!]^2$ é divisível por $(m!)^{n+1} \cdot (n!)^{m+1}$, para quaisquer m, n naturais.

Questão 55 (Torneio das cidades)

Existe alguma potência de 2, da qual seja possível rearranjar os dígitos e obter uma outra potência de 2?

Solução

Lema: Não podemos ter duas potências de 2, A e B , com a mesma quantidade de algarismos, uma vez que $A \equiv B \pmod{9}$.

Prova:

Se $n = 6q \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{9}$, pois $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Se $n = 6q + 1 \Rightarrow 2^n \equiv 2 \pmod{9}$, pois $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Se $n = 6q + 2 \Rightarrow 2^n \equiv 4 \pmod{9}$, pois $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Se $n = 6q + 3 \Rightarrow 2^n \equiv 8 \pmod{9}$, pois $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Se $n = 6q + 4 \Rightarrow 2^n \equiv 7 \pmod{9}$, pois $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Se $n = 6q + 5 \Rightarrow 2^n \equiv 5 \pmod{9}$, pois $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Se $2^t \equiv 2^r \pmod{9}$, então $t - r = 6s$, s sendo um número natural.

Se A e B tem o mesmo número de dígitos $A < 2^4 \cdot B$, é impossível que eles tenham a mesma congruência módulo 9, o que prova o lema.

Agora suponhamos, por absurdo, que B é obtido a partir reordenação dos dígitos de A . Então $A \equiv B \equiv C \pmod{9}$, sendo C a soma dos dígitos de A .

A e B possuem a mesma quantidade de dígitos e $A \equiv B \pmod{9}$, absurdo, pelo lema.

Questão 56 (Bélgica 1991)

Mostre que 111...111, formado por 1991 algarismos 1, não é um número primo.

Solução

$$111\dots 111 = \frac{1}{9} \cdot (10^{1992} - 1) = \frac{1}{9} \cdot (10^{996} - 1)(10^{996} + 1).$$

Note que $\frac{1}{9} \cdot (10^{996} - 1)$ é inteiro, pois $10 \equiv 1 \pmod{9}$ e $10^{996} + 1$ também é inteiro, ambos maiores do que 1. Logo esse número é composto.

Questão 57 (Bélgica 1992)

Se n é inteiro positivo, encontre o maior inteiro positivo k tal que $2^k \mid 3^n + 1$.

Solução

Claramente, $n = 1$ e $k = 2$ são a solução. Note que k não pode maior que 2, pois $3^n \equiv 1$ ou $3 \pmod{8} \Rightarrow 3^n \equiv 2$ ou $4 \pmod{8} \Rightarrow 3^n + 1 \equiv 2$ ou $4 \pmod{8}$.

Questão 58 (Moldávia 2002)

Encontre todas as soluções reais da equação: $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Solução

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Podemos então fazer $x = \cos \alpha$, em que $0 \leq \alpha \leq \pi$. Assim, temos que:

$$\text{i) } \sqrt{1-x} = \sqrt{1-\cos \alpha} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{como } 0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ temos que}$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2}).$$

$$\text{ii) } 2x^2 - 1 = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$

$$\text{iii) } 2x\sqrt{1-x^2} = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha \quad (\text{como } 0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ temos que } \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha).$$

$$\text{Daí temos que } \sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Temos dois casos a analisar.

$$\text{Caso 1: } 2\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\alpha}{2} + 2k\pi.$$

$$2\alpha + \frac{\pi}{4} = \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi + 8k\pi}{10} \quad \text{e como } 0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ temos que } \alpha = \frac{3\pi}{10}$$

é a única solução.

$$\text{Caso 2: } 2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$$

$$2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi + 8k\pi}{6} \quad \text{e como } 0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ temos que não há solução.}$$

$$\text{Logo, a única solução é } x = \cos \frac{3\pi}{10}.$$

Questão 59 (Bélgica 2005)

Encontre todos os inteiros positivos n tais que $\sqrt{n} + \sqrt{n+2005}$ seja inteiro.

Solução

Antes de fazer o problema provemos o seguinte lema.

Lema: Sejam a, b números racionais, então $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são racionais.

Prova: Se $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional, então $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ é racional;

$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 2\sqrt{a}$ é racional. Consequentemente, $\sqrt{a}$ também é racional.

Analogamente, $\sqrt{b}$ também é racional. Se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são racionais, então a soma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ também é racional, pois a soma de dois números racionais é sempre um número racional.

Agora vamos a nossa questão:

$\sqrt{n} + \sqrt{n+2005}$ é inteiro. Pelo lema, $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n+2005}$ são racionais, e particularmente $\sqrt{n}$ é natural. Portanto, n é quadrado perfeito, uma vez que qualquer raiz inexata é irracional. Daí temos que:

$$q = \sqrt{n+2005} \Rightarrow q^2 - p^2 = 2005,$$

Logo: $(q-p) \cdot (q+p) = 2005$. Como $2005 = 5 \cdot 401$, $(q-p) = 1$ e $(q+p) = 2005$ ou $(q-p) = 5$ e $(q+p) = 401$.

Resolvendo estes sistemas, temos: $(p, q) = \{(1002, 1003), (198, 203)\}$. Assim, $n = 1002^2$ ou $n = 198^2$.

Questão 60 (IMO 1959)

Mostre que para todo n natural, a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível.

Solução

Lema: Sejam a, b números naturais, assim como os números naturais q, r tais que $a = b \cdot q + r$, onde $0 \leq r < b$, então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$.

Prova: Sejam $m = \text{mdc}(a, b)$ e $n = \text{mdc}(b, r)$.

$m = \text{mdc}(a, b) \Rightarrow m|a$ e $m|b \Rightarrow m|a - bq \Rightarrow m|r$,

daí $m|b$ e $m|r$. Logo, $m|\text{mdc}(b, r) = n$.

Como $n = \text{mdc}(b, r) \Rightarrow n|r$ e $n|b \Rightarrow n|bq + r \Rightarrow n|a$,

$n|b$ e $n|a$. Daí, $n|\text{mdc}(a, b) = m$. Logo, $n|m$.

Como $m|n$ e $n|m$, então $m = n$.

Pelo lema, temos que:

$$\text{mdc}(21n + 4, 14n + 3) = \text{mdc}(14n + 3, 7n + 1) = \text{mdc}(7n + 1, 1) = 1.$$

Questão 61 (Holanda 1998)

Encontre todos os números reais x tais que:

$$(x + 1995) \cdot (x + 1997) \cdot (x + 1999) \cdot (x + 2001) + 16 = 0.$$

Solução

$$\begin{aligned} \text{Faça } y &= (x + 1998), \text{ então temos que } (y - 3) \cdot (y - 1) \cdot (y + 1) \cdot (y + 3) + 16 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y^2 - 9) \cdot (y^2 - 1) + 16 = 0 \Rightarrow y^4 - 10y^2 + 9 + 16 = 0 \Rightarrow (y^2 - 5)^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + 1998 = \pm \sqrt{5} \Rightarrow x = 1998 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Questão 62 (Lituânia 2006)

$$\text{Se } a + b + c = 0, \text{ prove que: } \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \cdot \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{b-a} \right) = 9.$$

Solução

Lema: Se $a + b + c = 0$, então: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Prova:

$$\text{i) Se } a + b + c = 0 \Rightarrow a^2b + ab^2 + abc = 0 \text{ (multiplicando por } ab)$$

$$\text{ii) Se } a + b + c = 0 \Rightarrow a^2c + ac^2 + abc = 0 \text{ (multiplicando por } ac)$$

$$\text{iii) Se } a + b + c = 0 \Rightarrow b^2c + bc^2 + abc = 0 \text{ (multiplicando por } bc)$$

$$\text{Somando as 3 temos: } (a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) = -3abc^*$$

$$\text{Como se } a + b + c = 0. \text{ Se } (a + b + c)^3 = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Agora vamos ao problema. Tirando o mmc na primeira expressão, teremos:

$$\frac{a^2b - b^2a - a^2c + c^2a - b^2c + c^2b}{abc}$$

Tirando o mmc na segunda expressão, teremos:

$$\frac{(-a^3 - b^3 - c^3 - 3abc + a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b)}{((b-c)(c-a)(a-b))} =$$

$$= \frac{-9abc}{a^2b - b^2a - a^2c + c^2a - b^2c + c^2b},$$

Nesta última igualdade usamos *, e o lema, logo o produto é 9.

Questão 63 (Putnam 1986)

Determine o dígito das unidades de $\left\lfloor \frac{10^{20000}}{3 + 10^{100}} \right\rfloor$.

Solução

Faça $x = 10^{100}$ e $y = (-3)$. Fatorando, temos que:

$$x^{200} - y^{200} = (x - y)(x^{199} + x^{198}y + \dots + xy^{198} + y^{199}). \quad (i)$$

Definindo:

$$I = \frac{-3^{200} + 10^{20000}}{3 + 10^{100}} = (10^{100})^{199} - (10^{100})^{198} \cdot 3 + \dots + 10^{100} \cdot 3^{198} - 3^{199} \quad \text{por (i),}$$

esse número é inteiro.

Note que I é a parte inteira de $\frac{10^{20000}}{3 + 10^{100}}$, pois $\frac{3^{200}}{3 + 10^{100}} = \frac{9^{200}}{3 + 10^{100}} < 1$.

Novamente por (i), temos que:

$$\begin{aligned} (10^{100})^{200} - (-3)^{200} &= \\ &= [10^{100} - (-3)] \cdot [(10^{100})^{199} + (10^{100})^{198}(-3) + \dots + (10^{100})^{198} + (-3)^{199}], \text{ logo} \\ I &\equiv (-3)^{199} \pmod{10}, \text{ logo } I \equiv (-3)^{199} \equiv -3^3(81)^{49} \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Assim, o dígito das unidades é 3.

Questão 64 (Banco do cone sul)

Prove que todo inteiro é a soma de cinco cubos.

Solução

Lema: Todo múltiplo de 6 pode ser escrito como soma de 4 cubos.

Prova: Se x é múltiplo de 6, então $x = 6k = (k + 1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3 + (k - 1)^3$.

Exemplo: Como escrever o 18 como soma de 4 cubos?

Neste caso temos $k = 3$, daí $18 = 4^3 + (-3)^3 + (-3)^3 + (2)^3$

Sabemos que um número deixa resto 0, 1, 2, 3, 4, 5 na divisão por 6.

Note que:

$$x = 6q = 6k + 0^3$$

$$x = 6q + 1 = 6k + 1^3$$

$$x = 6q + 2 = 6(s + 1) + 2 = 6k + 2^3$$

$$x = 6q + 3 = 6(r + 4) + 3 = 6k + 3^3$$

$$x = 6q + 4 = 6(p - 2) + 4 = 6k + (-2)^3$$

$$x = 6q + 5 = 6(t - 1) + 5 = 6k + (-1)^3$$

Caso 1: Se x deixa resto zero na divisão por 6

Neste caso basta completar com zero

Exemplo: Como escrever 30 como soma de 5 cubos?

Pelo lema temos que $k = 5$, logo $30 = 6^3 + (-5)^3 + (-5)^3 + (4)^3$

Acrescentando o zero fica $30 = 6^3 + (-5)^3 + (-5)^3 + (4)^3 + 0^3$

Caso 2: Se x deixa resto 1 na divisão por 6

Neste caso basta completar com 1

Exemplo: Como escrever 37 como soma de 5 cubos?

Pelo lema temos que $k = 6$, logo $36 = 7^3 + (-6)^3 + (-6)^3 + (5)^3$

Acrescentando o 1 fica $37 = 7^3 + (-6)^3 + (-6)^3 + (5)^3 + 1^3$

Caso 3: Se x deixa resto 2 na divisão por 6

Neste caso basta completar com 2

Exemplo: Como escrever 32 como soma de 5 cubos?

Temos que $k = s + 1$, assim $s = k - 1 = 4$, logo pelo lema $24 = 5^3 + (-4)^3 + (-4)^3 + (3)^3$

Acrescentando o 2 fica $32 = 5^3 + (-4)^3 + (-4)^3 + (3)^3 + 2^3$

Caso 4: Se x deixa resto 3 na divisão por 6

Neste caso basta completar com 2

Exemplo: Como escrever 33 como soma de 5 cubos?

Temos que $k = r + 4$, assim $r = k - 4 = 1$, logo pelo lema $6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (0)^3$

Acrescentando o 3 fica $33 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + 3^3$

Caso 5: Se x deixa resto 4 na divisão por 6

Neste caso basta completar com -2

Exemplo: Como escrever 34 como soma de 5 cubos?

Temos que $k = p - 2$, assim $p = k + 2 = 7$, logo pelo lema $42 = 8^3 + (-7)^3 + (-7)^3 + (6)^3$

Acrescentando o -2 fica $34 = 8^3 + (-7)^3 + (-7)^3 + (6)^3 + (-2)^3$

Caso 6: Se x deixa resto 5 na divisão por 6

Neste caso basta completar com -1

Exemplo: Como escrever 35 como soma de 5 cubos?

Temos que $k = t - 1$, assim $t = k + 1 = 6$, logo pelo lema $36 = 7^3 + (-6)^3 + (-6)^3 + (5)^3$

Acrescentando o -1 fica $35 = 7^3 + (-6)^3 + (-6)^3 + (5)^3 + (-1)^3$

Questão 65 (Banco do cone sul)

Ache todos os inteiros m e n tais que: $2^m - 3^n = 1$.

Solução

Primeiro caso: $m \geq 0$.

Se $m \geq 4$, então 2^m é múltiplo de 16 e $3^n \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$. Logo, não há solução se $m \geq 4$.

Verificando os casos $m = 0, 1, 2, 3$, verificamos que as soluções são $n = 0, 1$.

Segundo caso: $m < 0$.

Se $n > 0$, não há solução, pois 1 e 3^n são inteiros e 2^m não é. E se $n < 0$, então:

$$-2^{-m} + 3^{-n} = 2^{-m} \cdot 3^{-n}$$

o que é impossível, pois o primeiro membro é ímpar e o segundo é par.

Soluções: $\{(m, n) = (2, 1), (1, 0)\}$.

Questão 66 (Bélgica 1999)

Determine todos os n naturais de 6 dígitos ($abcdef$), sendo $n = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$, tais que $n = (def)^2$, ou seja, $n = (10^2d + 10e + f)^2$.

Solução

Pelo enunciado, temos que $f^2 \equiv f \pmod{10}$. Assim, $f = 0, 1, 5, 6$.
Vamos aos casos:

Primeiro caso: $f = 0$

Se $f = 0 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{100} \Rightarrow e = 0 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{100} \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{10000} \Rightarrow d = c = 0$, logo $n = 0$, absurdo.

Segundo caso: $f = 1$

$$n = (10^2d + 10e + f)^2 = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f = \\ = 10^4d^2 + 2 \cdot 10^3d \cdot e + 10^2(2 \cdot d \cdot e + e^2) + 10(2 \cdot e \cdot f) + f^2,$$

logo $2e \equiv e \pmod{10} \Rightarrow e \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow e = 0 \Rightarrow d = 0$, absurdo.

Terceiro Caso: $f = 5$

$$n = (10^2d + 10e + f)^2 = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f = \\ = 10^4d^2 + 2 \cdot 10^3d \cdot e + 10^2(2 \cdot d \cdot f + e^2) + 10(2 \cdot e \cdot f) + f^2 = \\ = 10^4d^2 + 2 \cdot 10^3d \cdot e + 10^2(2 \cdot d \cdot f + e^2) + 10(2 \cdot e \cdot f) + 25 = \\ = 10^4d^2 + 2 \cdot 10^3d \cdot e + 10^2(2 \cdot d \cdot f + e^2) + 10(2 \cdot e \cdot f + 2) + 5 \Rightarrow e \equiv 2 \pmod{10}$$

$e = 2 \Rightarrow e^2 + 2 = d = 6 \Rightarrow n = 625$ é uma solução.

Quarto Caso: $f = 6$

De maneira análoga ao terceiro caso, temos $n = 376$.
Soluções: $n = 141376$ ou 390625

Questão 67 (Hungria)

Sejam a e b reais positivos tais que $a + b = 1$. Prove que: $\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}$.

Solução

Primeira parte: Provar que: $\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1}$.

Prova: Como M.A. $\geq$ M.G, então, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq a \cdot b$.

Como $a + b = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2}{2a+b}$ e $\frac{b^2}{b+1} = \frac{b^2}{2b+a}$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} &= \frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+a} = \frac{b^2(2a+b) + (2b+a)a^2}{(2b+a)(2a+b)} = \\ &= \frac{2ab^2 + b^3 + 2ba^2 + a^3}{(2b+a)(2a+b)} = \frac{(2ab)(a+b) + (b+a)(b^2 - ab + a^2)}{(2b+a)(2a+b)} = \\ &= \frac{(2ab) + (-3ab) + (b+a)^2}{(2b+a)(2a+b)} = \frac{1-ab}{(a+1)(b+1)} = \frac{1-ab}{(ab+a+b+1)} = \frac{1-ab}{(ab+2)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{4} \geq ab \Rightarrow \frac{9}{4} \geq (ab + 2)$.

Novamente como $\frac{1}{4} \geq ab \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -ab \Rightarrow \frac{3}{4} \leq 1 - ab \Rightarrow \frac{1 - ab}{(ab + 2)} \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$.

Segunda Parte: Provar que: $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}$.

Prova: $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+a} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2b + a) \cdot a^2 + 2 \cdot (2a + b) \cdot b^2 < (2a + b) \cdot (2b + a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b + 2a^3 + 4ab^2 + 2b^3 < 2a^2 + 2b^2 + 4ab + ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4ab \cdot (a + b) + 2 \cdot (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) < 2[(a + b)^2 - 2ab] + 5ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4ab + 2 \cdot [(a + b)^2 - 3ab] < 2 + ab \Leftrightarrow 2 - 2ab < 2 + 2ab \Leftrightarrow 0 < 4ab, \text{ o que é verdade, pois } ab > 0.$$

Questão 68 (Polônia 1992)

Prove que para todo k natural, $(k^3)!$ é divisível por $(k!)^{1+k+k^2}$.

Solução

Pelo lema da questão 54, temos que $\frac{(mn)!}{n!(m!)^n}$ é inteiro. Fazendo $m = k^2$ e $n = k$,

então $\frac{(k^3)!}{k!(k^2!)^k}$ é inteiro. Fazendo $m = n = k$, temos que $\frac{(k^2)!}{k!(k!)^k}$ é inteiro, logo

$\frac{(k^2)!}{k!(k!)^k} \cdot \frac{(k^2)!}{k!(k!)^k} \cdots \frac{(k^2)!}{k!(k!)^k} \cdots \frac{(k^2)!}{k!(k!)^k}$ (k parcelas $\frac{(k^2)!}{k!(k!)^k}$), daí $\frac{(k^2!)^k}{(k!)^{k+k^2}}$ é inteiro.

Note que $\frac{(k^3)!}{(k!)^{1+k+k^2}} = \frac{(k^3)!}{k!(k^2!)^k} \cdot \frac{(k^2!)^k}{(k!)^{k+k^2}}$, logo $\frac{(k^3)!}{(k!)^{1+k+k^2}}$ é inteiro.

Questão 69 (Argentina 2000)

Ache todos os números reais, tais que: $x + 2y + 2z = xyz$.

Solução

Vamos dividir em 3 casos:

Caso 1: $x = \max\{x, y, z\}$.

Neste caso, temos que $x + 2y + 2z \leq 5x \Rightarrow yz \leq 5$, logo $(y, z) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (2, 2), (1, 5), (5, 1)\}$.

Fazendo as contas, as únicas soluções são $(x, y, z) = \{(6, 1, 2), (6, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 1, 3)\}$.

Caso 2: $y = \max\{x, y, z\}$.

Neste caso, temos que $x + 2y + 2z \leq 5y \Rightarrow xz \leq 5$, logo $(x, z) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (2, 2), (1, 5), (5, 1)\}$.

Fazendo as contas, as únicas soluções são $(x, y, z) = \{(3, 5, 1), (1, 5, 3), (1, 7, 3), (4, 5, 1), (2, 3, 2)\}$.

Caso 3: $z = \max\{x, y, z\}$.

Neste caso, temos que $x + 2y + 2z \leq 5z \Rightarrow xy \leq 5$, logo $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (2, 2), (1, 5), (5, 1)\}$.

Fazendo as contas as únicas soluções são $(x, y, z) = \{(3, 1, 5), (1, 3, 5), (1, 3, 7), (4, 1, 5), (2, 2, 3)\}$.

Questão 70 (Argentina 1997)

Ache todos os números reais tais que: $\lfloor 19x + 97 \rfloor = 19 + 97x$.

Solução

Se x é uma solução, então $97x$ é inteiro, pois $\lfloor 19x + 97 \rfloor$ e 19 são inteiros.

Logo, $x = \frac{a}{97}$, onde a é inteiro. Note que $x = 1$ é solução. Por outro lado,

como x é uma solução dessa equação, então:

$$\begin{aligned} \lfloor 19x + 97 \rfloor &\leq 19x + 97 < \lfloor 19x + 97 \rfloor + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 19 + 97x &\leq 19x + 97 < 19 + 97x + 1 \Rightarrow \frac{77}{78} < x \leq 1; \text{ daí } \frac{77}{78} < \frac{a}{97} \leq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{77 \cdot 97}{78} < a \leq 97, \end{aligned}$$

em que a é inteiro, sendo então $a = 96$ ou $a = 97$. Substituindo na equação, vemos que estes dois valores satisfazem a equação.

Soluções: $x = \frac{96}{97}$ ou $x = 1$.

Questão 71 (Putnam)

Seja n um número natural, prove que existe um múltiplo de n que tem que conter na sua representação decimal todos os números de 0 a 9.

Exemplo: 9234678105 é um múltiplo de 5 que contém todos os algarismos de 0 a 9.

Solução

Seja n um número natural com k dígitos, considere $m = 1234567890 \cdot 10^{k+1}$, então $m + 1, m + 2, \dots, m + n$ formam um sistema completo de restos, logo existe um que é múltiplo de n .

Questão 72 (Rússia 1999)

A soma dos algarismos de um inteiro positivo n escrito no sistema de numeração decimal é igual a 100 e a soma dos algarismos do número $44n$ é 800. Determine a soma dos algarismos do número $3n$.

Solução

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k$ os algarismos de n e $S(n)$ a soma de seus algarismos. Então, $44n = 40(a_1a_2\dots a_k) + 4(a_1a_2\dots a_k) = 4(a_1a_2\dots a_k) \cdot (10 + 1)$. Logo, se os algarismos de $44n$ forem:

$$4a_1, (4a_2 + 4a_1), (4a_3 + 4a_2), \dots, (4a_k + 4a_{k-1}) \text{ e } 4a_k,$$

teríamos $S(44n) = 8 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_k) = 800$.

Assim, se houvesse algum "vai-um", a soma dos algarismos de $44n$ cairia. Deste modo, todos os algarismos de n são menores ou iguais a 2 donde os algarismos de $3n$ são $3a_1, 3a_2, \dots, 3a_k$. Assim, $S(n) = 3a_1 + 3a_2 + \dots + 3a_k = 300$.

Questão 73 (Putnam 1972)

Seja n um número natural, $n > 1$. Prove que n não divide $2^n - 1$.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que exista um n natural tal que $n | 2^n - 1$. Seja p um primo, tal que $p | n$. Sendo $\text{mdc}(n, p - 1) = 1$, logo existem x, y números inteiros tais que $nx + (p - 1)y = 1$. Novamente como $\text{mdc}(n, p - 1) = 1$, temos pelo teorema Fermat que $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Como $n | 2^n - 1$, temos que $p | 2^n - 1$, assim $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Dai temos que $2 \equiv 2^{nx+(p-1)y} \equiv (2^n)^x \cdot (2^{p-1})^y \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{p}$, absurdo, logo não existe n tal que $n | 2^n - 1$.

Questão 74 (Ibero-Americana 1999)

Seja n um inteiro maior do que 10, tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $S = \{1, 3, 7, 9\}$. Prove que n tem algum divisor primo maior ou igual a 11.

Solução

Antes de fazer o problema, vamos provar uns lemas.

Lema 1: Seja $t = 3^p$, então o penúltimo algarismo da representação decimal t é par.

Prova do lema 1:

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

A partir daí haverá um ciclo de 4 em 4, pois $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

Agora vamos provar por indução o lema 1:

i) $n = 1$, é trivial.

ii) Suponhamos que seja válido para $n = k$.

$$3^k = 10^2h + 10x + r, \text{ onde } x \text{ é par.}$$

iii) Vamos provar para $n = k + 1$.

$$3^{k+1} = 3(10^2h + 10x + r) = 3 \cdot 10^2h + 10 \cdot (3x) + 3r.$$

Daí se $r = 1$, então $3^{k+1} = 3 \cdot 10^2h + 10 \cdot (3x) + 3$, e o penúltimo algarismo é par, pois $3x$ é par.

Se $r = 3$, então $3^{k+1} = 3 \cdot 10^2h + 10 \cdot (3x) + 9$, e o penúltimo algarismo é par, pois $3x$ é par.

Se $r = 7$, então $3^{k+1} = 3 \cdot 10^2h + 10 \cdot (3x + 2) + 1$, e o penúltimo algarismo é par, pois $3x + 2$ é par.

Se $r = 9$, então $3^{k+1} = 3 \cdot 10^2h + 10 \cdot (3x + 2) + 7$, e o penúltimo algarismo é par, pois $3x + 2$ é par.

Lema 2: Seja $w = 7^q$, então o penúltimo algarismo da representação decimal w é par.

Prova do lema 2:

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

A partir daí, haverá um ciclo de 4 em 4, pois $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

Agora vamos provar por indução o lema 2:

i) $n = 1$, é trivial.

ii) Suponhamos válido para $n = k$.

$$7^k = 10^2c + 10d + y, \text{ onde } d \text{ é par.}$$

iii) Vamos provar para $n = k + 1$.

$$7^{k+1} = 7(10^2c + 10d + y) = 7 \cdot 10^2c + 10 \cdot (7d) + 7y.$$

Daí se $y = 1$, então $7^{k+1} = 7 \cdot 10^2c + 10 \cdot (7d) + 7$, e o penúltimo algarismo é par, pois $7d$ é par.

Se $y = 3$, então $7^{k+1} = 3 \cdot 10^2 c + 10 \cdot (7d + 2) + 1$, e o penúltimo algarismo é par, pois $7d + 2$ é par.

Se $y = 7$, então $7^{k+1} = 3 \cdot 10^2 c + 10 \cdot (7d + 4) + 9$, e o penúltimo algarismo é par, pois $7d + 4$ é par.

Se $y = 9$, então $7^{k+1} = 3 \cdot 10^2 c + 10 \cdot (7d + 6) + 3$, e o penúltimo algarismo é par, pois $7d + 6$ é par. Isso prova o lema 2.

Lema 3: Seja m um número natural tal que $m = 3^a \cdot 7^b$, onde a e b são números naturais; então o penúltimo algarismo da sua representação decimal é par.

Prova do Lema 3:

Vamos analisar 3 casos:

Caso 1: $a = b$

Neste caso temos $m = (21)^a$.

Vamos analisar congruência módulo 100.

$$21^1 \equiv 21 \pmod{100}$$

$$21^2 \equiv 441 \equiv 41 \pmod{100}$$

$$21^3 \equiv 21^2 \cdot 21 \equiv 41 \cdot 21 \equiv 861 \equiv 61 \pmod{100}$$

$$21^4 \equiv 21^3 \cdot 21 \equiv 61 \cdot 21 \equiv 1281 \equiv 81 \pmod{100}$$

$$21^5 \equiv 21^4 \cdot 21 \equiv 81 \cdot 21 \equiv 1701 \equiv 01 \pmod{100}$$

A partir daí haverá um ciclo de 5 em 5, pois $21^5 \equiv 1 \pmod{100}$.

Em qualquer caso, temos que o penúltimo algarismo de m é par.

Caso 2: $a > b$

Neste caso, seja $t = a - b$, então temos que $m = (21)^b \cdot 3^t$.

$3^t = 10s + r$, onde s é par e $r = 1$ ou 3 ou 7 ou 9 e $(21)^a = 100c + 10d + 1$, onde d e s são pares (pelo lema 1 e caso 1) daí temos que $m = (21)^b \cdot 3^t = (100c + 10d + 1) \cdot (10s + r) = 1000cs + 100cr + 100ds + 10dr + 10s + r = 100 \cdot (10cs + cr) + 10(dr + s) + r$. Como d e s são pares, então o penúltimo algarismo de m é par.

Caso 3: $a < b$.

Prova análoga ao caso 2.

Agora vamos ao problema: suponhamos, por absurdo, que exista algum n um número inteiro maior do que 10, tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $S = \{1, 3, 7, 9\}$ tal que n não possui nenhum divisor primo maior do que 11.

Então $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, onde a, b, c, d são números naturais.

Note que $a = 0$ e $c = 0$, pois se $a \neq 0$, então n teria o último dígito par e se $c \neq 0$ então n teria o último dígito 0 ou 5. Logo $n = 3^b \cdot 7^d$ e pelo lema 3, o penúltimo algarismo de n é par, absurdo. Logo n possui um fator primo maior ou igual a 11.

Questão 75 (Moldávia 2000)

Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $(a + b + c) = 0$. Mostre que o número $2(a^4 + b^4 + c^4)$ é um quadrado perfeito.

Solução 1:

$$\text{i) } (a + b + c) = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$$

$$\text{ii) } (a + b + c) = 0 \Rightarrow c + b = -a \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2 - 2cb$$

$$\text{iii) } (a + b + c) = 0 \Rightarrow a + c = -b \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 - 2ac$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + a^2(c^2 + b^2) + b^2(c^2 + a^2) + c^2(a^2 + b^2) = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + a^2(a^2 - 2cb) + b^2(b^2 - 2ac) + c^2(c^2 - 2ab) = \\ &= 2(a^4 + b^4 + c^4) - 2abc(a + b + c) = 2(a^4 + b^4 + c^4). \end{aligned}$$

Logo o número $2(a^4 + b^4 + c^4)$ é um quadrado perfeito.

Solução 2:

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c . Daí temos que $a + b + c = -m = 0$, $ab + ac + bc = p$ e $abc = -q$. Assim temos que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$$

Por outro lado, temos que:

$$a^3 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pa - q \quad (\text{i})$$

$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q \quad (\text{ii})$$

$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q \quad (\text{iii})$$

Somando (i) + (ii) + (iii), temos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = -p(a + b + c) - 3q = -3q$$

Da mesma forma temos que:

$$a^4 + pa^2 + q = 0 \Rightarrow a^4 = -pa^2 - qa \quad (\text{iv})$$

$$b^4 + pb^2 + q = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb \quad (\text{v})$$

$$c^4 + pc^2 + q = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc \quad (\text{vi})$$

Somando (iv) + (v) + (vi), temos que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = -p(a^2 + b^2 + c^2) - q(a + b + c) = 2p^2$$

Logo, temos que $2(a^4 + b^4 + c^4) = 4p^2 = (2p)^2$.

Questão 76 (Eslovênia 2001)

a) Mostre a desigualdade: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

b) Mostre que a parte inteira da expressão

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2}}.$$

onde m é um inteiro positivo é igual a $2m - 1$ ou $2m - 2$.

Solução

a) **Primeira Parte:** Provar que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$\text{Prova: } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$\text{Como } \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Segunda Parte: Provar que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$\text{Prova: } \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$\text{Como } \sqrt{n-1} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n-1} + \sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} - \sqrt{n-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

b) Pelo item a, temos que:

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} < \frac{1}{2\sqrt{1}} < \sqrt{1} - \sqrt{0}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{4} < \frac{1}{2\sqrt{4}} < \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{m^2} - \sqrt{-1+m^2} < \frac{1}{2\sqrt{-1+m^2}} < \sqrt{-1+m^2} - \sqrt{-2+m^2}$$

$$\sqrt{1+m^2} - \sqrt{m^2} < \frac{1}{2\sqrt{m^2}} < \sqrt{m^2} - \sqrt{-1+m^2}$$

Somando membro a membro, temos que

$$\sqrt{1+m^2} - 1 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} \right) < m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{1+m^2}) - 2 < \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} \right) < 2m \Rightarrow 2m.$$

$$-2 < \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} \right) < 2m, \quad \text{logo a parte inteira de}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} \text{ é } 2m-1 \text{ ou } 2m-2.$$

Questão 77 (Espanha 1999)

Mostre que existe uma sequência de inteiros positivos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ tal que $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots + (a_n)^2$ é um quadrado perfeito para todo inteiro positivo n .

Solução

Seja $S_n = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots + (a_n)^2$.

Defina $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{S_n - 1}{2}$. Vou provar que o a_n , definido dessa forma, é sempre par para todo natural $n > 1$.

i) $n = 2$, é óbvio.

ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$.

$a_2, a_3, \dots, a_k$ são todos pares

iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 1$.

$a_{k+1} = \frac{S_k - 1}{2}$, daí $S_k \equiv 1 \pmod{4}$, logo a_{k+1} é par. Logo a_n é sempre par e inteiro para todo natural $n > 1$.

Daí $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots + (a_n)^2 + (a_{n+1})^2 = 2a_{n+1} + 1 + (a_{n+1})^2 = (1 + a_{n+1})^2$ é sempre quadrado perfeito.

Questão 78 (Estados Unidos 1992)

Mostre que:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 87^\circ \cdot \cos 88^\circ} + \frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ \cdot \sin 1^\circ}.$$

Solução

$$\operatorname{tg}(k+1) - \operatorname{tg} k = \frac{\operatorname{sen} k + 1}{\operatorname{cos} k + 1} - \frac{\operatorname{sen} k}{\operatorname{cos} k} = \frac{-\operatorname{cos}(k+1) \cdot \operatorname{sen} k + \operatorname{cos} k \cdot \operatorname{sen} k + 1}{\operatorname{cos} k \cdot \operatorname{cos} k + 1} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\operatorname{cos} k \cdot \operatorname{cos} k + 1} = \operatorname{sen} 1^\circ \left(\frac{1}{\operatorname{cos} k \cdot \operatorname{cos} k + 1} \right).$$

Daí, temos que:

$$\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} \right)$$

$$\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} \right)$$

$$\operatorname{tg} 3^\circ - \operatorname{tg} 2^\circ = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ} \right)$$

$$\dots$$

$$\operatorname{tg} 88^\circ - \operatorname{tg} 87^\circ = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 87^\circ} \right)$$

$$\operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{tg} 88^\circ = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} \right)$$

Somando membro a membro, temos que: $\operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ =$

$$\operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 87^\circ \cdot \cos 88^\circ} + \frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} \right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} 89^\circ}{\cos 89^\circ} - 0 = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 87^\circ \cdot \cos 88^\circ} \right)$$

$$\frac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen} 1^\circ} = \operatorname{sen} 1^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 87^\circ \cdot \cos 88^\circ} \right)$$

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 87^\circ \cdot \cos 88^\circ} + \frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen} 1^\circ \cdot \operatorname{sen} 1^\circ}$$

Questão 79 (Uruguai 2002)

Seja $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, prove que x é um número inteiro.

Solução

Note que $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ e $(1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}$, logo $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$, logo $x = 2$.

Questão 80 (Uruguai 2004)

O número $N = 111\dots 111$ formado por 300 algarismos 1 é quadrado perfeito?

Solução

Note que $N \equiv 300 \pmod{9} \Rightarrow N \equiv 3 \pmod{9}$. Logo N não é quadrado perfeito, pois N é divisível por 3, mas não divisível por 9.

Questão 81 (Uruguai 1999)

Existem x e y inteiros tais que: $5x^2 - 4y^2 = 1999$

Solução

Note que $1999 \equiv 3 \pmod{4}$ e como $x^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod{4} \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$, logo a equação acima não possui solução inteira.

Questão 82 (Uruguai 2000)

Existem números reais x e y tais que: $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 2$ e $x^3 + y^3 = 3$?

Solução

$$\text{Se } x + y = 1 \Rightarrow (x + y)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 1 \Rightarrow xy = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Se } x + y = 1 \Rightarrow (x + y)^3 = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 1 \Rightarrow 3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = 1, \text{ absurdo!}$$

Logo não existem tais x e y .

Questão 83 (Uruguai 2004)

Calcule $\sqrt{2004 \cdot 2002 \cdot 1998 \cdot 1996 + 36}$.

Solução

Faça $x = 2000$, então

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2004 \cdot 2002 \cdot 1998 \cdot 1996 + 36} &= \sqrt{(x+4)(x+2)(x-4)(x-2) + 36} = \\
 &= \sqrt{(x^2-4)(x^2-16) + 36} = \sqrt{(x^2-4)(x^2-16) + 36} = \\
 &= \sqrt{(x^4 - 20x^2 + 64) + 36} = \sqrt{(x^4 - 20x^2 + 100)} = (x^2 - 10) = (2000^2 - 10).
 \end{aligned}$$

Questão 84 (Chile 1999)

Existem inteiros x e y tais que: $x^2 + y^2 = 1999xy$.

Solução

Vamos analisar os casos:

Caso 1: x e y são ímpares.

Neste caso, teremos $x^2 + y^2$ é par e $1999xy$ é ímpar. Logo, não há solução nesse caso.

Caso 2: x é par e y é ímpar (o caso x é ímpar e y é par é análogo).

Neste caso, temos que $x^2 + y^2$ é ímpar e $1999xy$ é par.

Caso 3: x e y são pares.

Neste caso, observe o seguinte: se houver um par (a, b) como solução, então:

$$a > 0 \text{ e } b > 0 \quad \text{ou} \quad a < 0 \text{ e } b < 0.$$

E se (a, b) é solução, então $(-a, -b)$ também é solução.

Agora seja $S = \{(m, n), \text{ onde } m^2 + n^2 = 1999mn \text{ e } m > 0 \text{ e } n > 0\}$. Se $S \neq \emptyset$, então existe um par (c, d) , onde c é mínimo. Daí $c^2 + d^2 = 1999cd$.

Como c e d são pares, então $c = 2t$ e $d = 2s$. Logo, $4t^2 + 4s^2 = 1999 \cdot 2t \cdot 2s$

$\Rightarrow t^2 + s^2 = 1999 \cdot t \cdot s$, daí $(t, s) \in S$, absurdo!

Assim, $S = \emptyset$, portanto não há solução positiva. Por conseguinte, também não há solução negativa, pois se (a, b) é solução, $(-a, -b)$ é solução.

Questão 85 (Chile 2003)

Encontre todos os primos p, q tais que: $p + q = (p - q)^3$.

Solução

Analisemos congruência módulo 3:

Caso 1: $p \equiv 1 \pmod{3}$ e $q \equiv 1 \pmod{3}$.

Neste caso, temos que $p + q \equiv 2 \pmod{3}$ e $(p - q)^3 \equiv 0 \pmod{3}$, absurdo!

Caso 2: $p \equiv 1 \pmod{3}$ e $q \equiv 2 \pmod{3}$.

Neste caso, temos que $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ e $(p - q)^3 \equiv 2 \pmod{3}$, absurdo!

Caso 3: $p \equiv 2 \pmod{3}$ e $q \equiv 1 \pmod{3}$.

Neste caso, temos que $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ e $(p - q)^3 \equiv 1 \pmod{3}$, absurdo!

Caso 4: $p \equiv 2 \pmod{3}$ e $q \equiv 2 \pmod{3}$.

Neste caso, temos que $p + q \equiv 1 \pmod{3}$ e $(p - q)^3 \equiv 0 \pmod{3}$, absurdo!

Logo $p = 3$ ou $q = 3$.

Se $p = 3$, então $3 + q = (3 - q)^3$. Daí temos que $q < 3$, logo $q = 2$, o que não é solução.

E se $p = 3$, então $3 + p = (p - 3)^3 \Rightarrow p^3 - 9p^2 + 26p - 30 = 0$.

Por inspeção, temos que 5 é raiz. Daí temos que $(p - 5) \cdot (p^2 - 4p + 6) = 0$.

Logo, $p = 5$ é a única solução.

Questão 86 (Chile 2001)

Seja n um número natural, prove que $2^{2^n} - 1$ é múltiplo de 3.

Solução

$2^{2^n} \equiv (4)^{2^{n-1}} \equiv (1)^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{3}$, para todo n natural. Logo $2^{2^n} - 1$ é múltiplo de 3.

Questão 87 (Chile 1999)

Um número é dito bom se a soma de seus divisores exceto ele próprio for maior do que ele.

Por exemplo, 12 é bom, pois $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$ e 15 não é bom, pois $1 + 3 + 5 = 9 < 15$. Prove que há infinitos números bons.

Solução

Seja $s(n)$ a soma dos divisores de n . Note que todo múltiplo de 12 é bom, pois

possui como divisores $\frac{n}{12}, \frac{n}{6}, \frac{n}{4}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}$. Logo

$$s(n) \geq \frac{n}{12} + \frac{n}{6} + \frac{n}{4} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = \frac{n + 2n + 3n + 4n + 6n}{12} = \frac{15n}{12} > n.$$

Questão 88 (Vietnã 2002)

Resolva a equação: $\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2$.

Solução

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2 &\Leftrightarrow 4 - 3\sqrt{10 - 3x} = (x - 2)^2 \Leftrightarrow -3\sqrt{10 - 3x} = x^2 - 4x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9 \cdot (10 - 3x) = (x^2 - 4x)^2 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 90 = 0. \end{aligned}$$

Por inspeção, vemos que 3 e -2 são raízes. Fatorando, vem:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 90 = (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 7x - 15) = 0$$

Logo as soluções são $x = 3$, $x = -2$, $x = \frac{7 + i\sqrt{11}}{2}$ e $x = \frac{7 - i\sqrt{11}}{2}$.

Questão 89 (Canadá 1969)

Calcule a soma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$

Solução

$k + 1! - k! = k! \cdot [(k + 1) - 1] = k \cdot k!$ Logo, temos que:

$$1 \cdot 1! = 2! - 1!$$

$$2 \cdot 2! = 3! - 2!$$

$$3 \cdot 3! = 4! - 3!$$

.....

$$n \cdot n! = (n + 1)! - n!$$

Daí temos que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Questão 90 (Pan - África 2004)

O número: $4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{97 - 56\sqrt{3}}$ é inteiro?

Solução: Note que:

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1, \text{ pois } (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Note também que $\sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$, pois $(7 - 4\sqrt{3})^2 = 97 - 56\sqrt{3}$

$$\text{logo } 4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 4(\sqrt{3} - 1) + (7 - 4\sqrt{3}) = 3.$$

Questão 91 (Alemanha 2006)

Prove que a soma do produto de 4 números ímpares consecutivos com 16 é quadrado perfeito.

Solução

$$(2n + 1)(2n + 3)(2n - 1)(2n - 3) + 16 = (4n^2 - 1)(4n^2 - 9) + 16 = 16n^4 - 10n^2 + 25 = (4n^2 - 5)^2.$$

Questão 92 (Austrália 1983)

Mostre que a equação $x^4 + 131 = 3y^4$ não possui solução inteira.

Solução

$$a \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a^4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow a^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow a^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow a^4 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x^4 + 131 \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{5} \text{ e } 3y^4 \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod{5}.$$

Logo, a equação não tem solução.

Questão 93 (Balcânica 1990)

Seja $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$. Determine todos os n , tais que a_n é divisível por 11.

Solução

Faça $n = k - 2$, daí teremos que $a_k = (k+1)a_{k-1} - ka_{k-2}$ ($a_k - a_{k-1} = k(a_{k-1} - a_{k-2})$)

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} - a_{k-2}} = k; \text{ logo } \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = 3, \quad \frac{a_4 - a_3}{a_3 - a_2} = 4, \dots, \quad \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} - a_{k-2}} = k.$$

Multiplicando esses termos, membro a membro, teremos um produto telescópico e daí $\frac{a_k - a_{k-1}}{a_2 - a_1} = 3 \cdot 4 \dots k$, logo $a_k - a_{k-1} = k!$.

Daí temos que $a_2 - a_1 = 2!$, $a_3 - a_2 = 3!$, $a_4 - a_3 = 4!$, ..., $a_k - a_{k-1} = k!$.

Somando-se, membro a membro, teremos uma soma telescópica, logo $a_k - a_1 = 2! + 3! + \dots + k!$.

Temos então $a_k = 1! + 2! + 3! + \dots + k!$. Daí, que $a_3 = 9$, $a_4 = 33$, $a_5 = 153$, ...

Analisando a congruência módulo 11, temos que $n = 4$ ou $n = 8$ ou $n \geq 10$, são as soluções.

Questão 94 (Inglaterra 2001)

Encontre todos os reais positivos que satisfaçam a equação:

$$x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Solução

$$x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \Rightarrow x = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor, \text{ assim } x \text{ é inteiro.}$$

Agora faça $x = 6q + r$, onde $0 \leq r \leq 5$.

Se $x = 6q$, então $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = 4q + 3q - q \Rightarrow 6q = 6q$. Logo, todo número da forma $6q$ é solução.

Se $x = 6q + 1$, então $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = 4q + 3q - q \Rightarrow 6q + 1 = 6q$, absurdo.

Se $x = 6q + 2$, então $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = (4q + 1) + (3q + 1) - q \Rightarrow 6q + 2 = 6q + 2$.

Logo, todo número da forma $6q + 2$ é solução.

Se $x = 6q + 3$, então $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = (4q + 2) + (3q + 1) - q \Rightarrow 6q + 1 = 6q + 3$.

Logo, todo número da forma $6q + 3$ é solução.

Se $x = 6q + 4$, então $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = (4q + 2) + (3q + 2) - q \Rightarrow 6q + 4 = 6q + 4$.

Logo, todo número da forma $6q + 4$ é solução.

Se $x = 6q + 5$, então $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = (4q + 3) + (3q + 2) - q \Rightarrow 6q + 5 = 6q + 5$.

Logo, todo número da forma $6q + 5$ é solução.

Conclusão: A solução é todos os inteiros exceto os que deixam resto 1 na divisão por 6.

Questão 95 (China 2002)

Se x e y são números reais, tais que $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$. Determine o valor mínimo de $x^2 + y^2$.

Solução

Faça $x + 5 = 14 \cos \alpha$ e $y - 12 = 14 \sin \alpha$, onde $\alpha \in [0, 2\pi]$. Daí temos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (-5 + 14 \cos \alpha)^2 + (12 + 14 \sin \alpha)^2 = 169 + 28(12 \sin \alpha - 5 \cos \alpha) = \\ &= 169 + 28 \cdot 13 \cdot \left(\frac{12}{13} \sin \alpha - \frac{5}{13} \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } \frac{12}{13} = \sin \beta \text{ e } \frac{5}{13} = \cos \beta \Rightarrow x^2 + y^2 = 169 + 364 \sin(\alpha - \beta).$$

Como $\sin(\alpha - \beta) \geq -1$, temos que $x^2 + y^2 \geq 1$.

Questão 96 (Inglaterra 1997)

Seja N um número de 4 algarismos, em que N não termina em zero. Defina $R(N)$ como sendo o número N escrito ao contrário. Por exemplo se $N = 3257$, então $R(N) = 7523$. Determine todos os N tais que $R(N) = 4N + 3$.

Solução

Como $R(N)$ tem 4 algarismos, então temos que $R(N) \leq 9999 \Rightarrow 4N + 3 \leq 9999 \Rightarrow N \leq 2499$, logo os primeiros algarismos de N é 1 ou 2.

Caso 1: O primeiro algarismo é 2.

Neste caso $R(N)$ termina em 2, o que é impossível, pois $R(N) = 4N + 3$ que é ímpar.

Caso 2: O primeiro algarismo é 1.

Neste caso $R(N)$ termina em 1, logo N tem que terminar em 2 ou 7. Como $N \geq 1000 \Rightarrow R(N) \geq 4000$, logo não pode terminar em 2. Assim, N termina em 7.

Logo $7000 \leq 4N + 3 \leq 8000 \Rightarrow 1749,25 \leq N \leq 1999,25$, logo o segundo algarismo é 7 ou 8 ou 9.

Por outro lado, temos $N \equiv R(N) \pmod{9}$.

Daí se $N \equiv a \pmod{9}$, então $a \equiv 4a + 3 \pmod{9} \Rightarrow 0 \equiv 3a + 3 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv 2$ ou 5 ou $7 \pmod{9}$, portanto a soma dos dígitos de N é 2 ou 11 ou 20 ou 29 ou 5 ou 14 ou 23 ou 32 ou 7 ou 16 ou 25 ou 34. Vamos ver as possibilidades:

Possibilidade 1: 17b7

Pelas somas acima, temos que $N = 1757$ ou 1787 ou 1717 . Fazendo as contas, vemos que não são solução.

Possibilidade 2: 18b7

Pelas somas acima, temos que $N = 1847$ ou 1877 ou 1807 . Fazendo as contas, vemos que não são solução.

Possibilidade 3: 19b7

Pelas somas acima, temos que $N = 1937$ ou 1967 ou 1987 . Fazendo as contas vemos que não são solução.

Logo não há nenhum número que satisfaça as condições do problema.

Questão 97 (Rússia 1998)

Um número de dez algarismos é interessante se seus dígitos forem todos distintos e se ele for múltiplo de 11111. Quantos números interessantes existem?

Solução

Seja I um número interessante. Da definição, vem:

$$I \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + 9 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Logo, $I = 99999$. $N = (10^5 - 1)$ para algum número natural N de 5 algarismos. Digamos $N = a_1a_2a_3a_4a_5$, logo: $I = 10^9a_1 + \dots + 10^5a_5 - 10^4a_1 - \dots - 10a_4 - a_5 = 10^9a_1 + \dots + 10^6a_6 + 10^5(a_5 - 1) + 10^4(a_4 - 1) + 10^3(a_3 - 1) + 10^2(a_2 - 1) + 10(a_1 - 1)$.

Sejam $d_1, d_2, \dots, d_9, d_{10}$ os dígitos de I , nesta ordem, então:

$$d_1 + d_9 = 9, d_2 + d_8 = 9, d_3 + d_7 = 9, d_4 + d_6 = 9, d_5 + d_{10} = 9.$$

Como os únicos pares de dígitos cuja soma é 9 são (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6) e (4, 5), o número de possibilidades para $d_1, d_2, \dots, d_9, d_{10}$ é:

$$9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3456.$$

Questão 98 (Bielorússia 2001)

Determine o resto da divisão de $1! \cdot 5 + 2! \cdot 11 + \dots + k! \cdot (k^2 + 3k + 1) + \dots + 200! \cdot 40601$ por 2004.

Solução

$k! \cdot (k^2 + 3k + 1) = k! \cdot [(k+1)(k+2) - 1] = (k+2)! - k!$. Logo a soma é $(3! - 1!) + (4! - 2!) + (5! - 3!) + (6! - 4!) + \dots + (199! - 197!) + (200! - 198!) + (201! - 199!) + (202! - 200!) = 202! + 201! - 1! - 2!$. Como $202! \equiv 0 \pmod{2004}$ e $201! \equiv 0 \pmod{2004}$, então o resto é 2001.

Questão 99 (Rússia 1995)

Encontre todos os primos p tais que o número $p^2 + 11$ tenha exatamente seis divisores diferente (incluindo 1 e ele mesmo).

Solução

$p = 2 \Rightarrow p^2 + 11 = 15$ e $p = 3 \Rightarrow p^2 + 11 = 20$, daí 3 é solução.

Se $p \geq 5$, então $p = 6q \pm 1 \Rightarrow p^2 + 11 = 6(6q^2 \pm 2q + 2)$, portanto, é múltiplo de 6, e por isso, já tem no mínimo 4 divisores: 1, 2, 3, 6.

Logo $\frac{11+p^2}{1}, \frac{11+p^2}{2}, \frac{11+p^2}{3}, \frac{11+p^2}{6}$, são divisores. Para termos exatamente 6 divisores, devemos ter $\frac{11+p^2}{3} = 6$ e $\frac{11+p^2}{6} = 3 \Rightarrow p^2 = 7$, absurdo.

Conclusão: 3 é a única solução.

Questão 100 (Espanha 1998)

As tangentes dos ângulos de um triângulo são números inteiros positivos. Determine estes números.

Solução

Lema 1: Sejam A, B, C ângulos de um triângulo, então vale que:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Prova:

Como A, B, C são ângulos de um triângulo, então vale que:

$$A + B + C = 180, \text{ logo } \operatorname{tg}(A + B + C) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(B + C)}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg}(B + C)} = 0, \text{ logo } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(B + C) = 0.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } \operatorname{tg}(B + C) = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg}(C)}{1 - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg}(C)}.$$

Substituindo isso no resultado anterior, temos que:

$$\operatorname{tg} A(1 - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C) + \operatorname{tg}(B + C) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Lema 2: Sejam x, y, z números inteiros positivos, tais que $x + y + z = xyz$. Então $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ e suas permutações.

Prova:

Caso 1: $x = \max\{x, y, z\}$

Neste caso, temos que $x + y + z \leq 3x$, logo $xy = 1$ ou $xy = 2$ ou $xy = 3$. Assim $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$, daí analisando esses casos temos como solução $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$.

Caso 2: $y = \max\{x, y, z\}$

Analogamente ao caso 1, temos como soluções $(1, 3, 2)$ e $(2, 3, 1)$.

Caso 3: $z = \max\{x, y, z\}$

Analogamente ao caso 1, temos como soluções $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 3)$.

Pelos lemas 1 e 2, temos que as tangentes dos ângulos são 1, 2, 3.

Questão 101 (Canadá 1969)

Mostre que não existem números inteiros tais que $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Solução

Vamos analisar congruência módulo 8:

$$x \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$x \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$x \equiv 2 \pmod{8} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$x \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\begin{aligned}x \equiv 4 \pmod{8} &\Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{8} \\x \equiv 5 \pmod{8} &\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{8} \\x \equiv 6 \pmod{8} &\Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{8} \\x \equiv 7 \pmod{8} &\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{8}\end{aligned}$$

Logo $a^2 + b^2 - 8c \equiv 0, 1, 2, 4, 5 \pmod{8}$; portanto, a equação acima não tem solução.

Questão 102 (Argentina 2002)

Um número n de 3 algarismos todos diferentes de zero é dito bom se $n + 1$ é múltiplo do número de dois algarismos que se obtém ao retirarmos o primeiro algarismo de n . Por exemplo 123 não é bom, pois 124 não é múltiplo de 23 e 267 é bom, pois 268 é múltiplo de 67. Encontre todos os números bons.

Solução

Seja $n = (abc) = 100a + 10b + c$. Se n for bom, então $10b + c | 100a + 10b + c + 1 \Rightarrow 10b + c | 100a + 1$. Agora vamos analisar os casos:

Caso 1: $a = 1$

Dai temos que $10b + c | 101$; logo $10b + c = 1$ ou $101 \Rightarrow b = 0$, absurdo.

Caso 2: $a = 2$

Dai temos que $10b + c | 201$; logo $10b + c = 1$ ou 3 ou 67 ou 201; logo $b = 6$ e $c = 7$. Assim $n = 267$.

Caso 3: $a = 3$

Dai temos que $10b + c | 301$; logo $10b + c = 1$ ou 7 ou 43 ou 301; logo $b = 4$ e $c = 3$. Assim $n = 343$.

Caso 4: $a = 4$

Dai temos que $10b + c | 401$; logo $10b + c = 1$ ou $401 \Rightarrow b = 0$, absurdo.

Caso 5: $a = 5$

Dai temos que $10b + c | 501$; logo $10b + c = 1$ ou 3 ou 167 ou 501, absurdo.

Caso 6: $a = 6$

Dai temos que $10b + c | 601$, logo $10b + c = 1$ ou 601, absurdo.

Caso 7: $a = 7$

Dai temos que $10b + c | 701$, logo $10b + c = 1$ ou 701, absurdo.

Caso 8: $a = 8$

Dai temos que $10b + c | 801$, logo $10b + c = 1$ ou 3 ou 267 ou 801, absurdo.

Caso 9: $a = 9$

Dai temos que $10b + c | 901$, logo $10b + c = 1$ ou 17 ou 53 901, assim $b = 1$ e $c = 7$ ou $b = 5$ e $c = 3$, portanto $n = 917$ ou 953 .

Questão 103 (Eslovênia 1992)

Prove que para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n$, o número:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \text{ é par.}$$

Solução

Seja $y_1 = a_1 - a_2, y_2 = a_2 - a_3, \dots, y_n = a_n - a_1$. Note que x é par, então $|x|$ é par e se x é ímpar, $|x|$ é ímpar. Como $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$, $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ é par; logo a quantidade de y_i que são números ímpares é par. Assim a quantidade y_i , tais que $|y_i|$ é ímpar também é par. Logo $|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|$ é par.

Questão 104 (Moldávia 1996)

Mostre que:

$$\frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \frac{1}{668} + \dots + \frac{1}{1996} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{1994 \cdot 1995 \cdot 1996}$$

Solução

Provemos, por indução, algo mais geral:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(3n-1) \cdot (3n) \cdot (3n+1)}$$

i) Para $n = 1$, temos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ que é verdade.

ii) Suponhamos que seja válido para $n = k$:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(3k-1) \cdot (3k) \cdot (3k+1)}$$

iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} = \\ & = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(3k-1) \cdot (3k) \cdot (3k+1)} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \\ & = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(3k-1) \cdot (3k) \cdot (3k+1)} + \\ & + \frac{(3k+3) \cdot (3k+4) + (3k+2) \cdot (3k+4) + (3k+3) \cdot (3k+2) - 3 \cdot (3k+4) \cdot (3k+2)}{(3k+1) \cdot (3k+2) \cdot (3k+3)} = \\ & = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(3k-1) \cdot (3k) \cdot (3k+1)} + \frac{2}{(3k+2) \cdot (3k+3) \cdot (3k+4)} \end{aligned}$$

portanto vale a propriedade.

Em particular, para $n = 665$, temos o resultado desejado.

Questão 105 (Rússia 2002)

Um número de 4 algarismos é escrito em um quadro negro. As operações permitidas são: adicionar 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 9) ou subtrair 1 a dois dígitos vizinhos (caso nenhum deles seja 0). É possível obtermos 2002 a partir do número 1234 utilizando algumas operações?

Solução

Note que em qualquer operação, somamos ou subtraímos ao número original um número da forma: $10^n + 10^{n+1} = 11 \cdot (10^n)$. Logo o resto na divisão do número fica invariante. Como $2002 \equiv 4 \pmod{9}$ e $1234 \equiv 1 \pmod{9}$, tal operação é impossível.

Questão 106 (Espanha 2008)

Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é múltiplo de 7.

Solução

Como $2222 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow (2222)^{5555} \equiv [(3)^6]^{925} \cdot 3^5 \pmod{7} \Rightarrow (2222)^{5555} \equiv 3^5 \equiv 5 \pmod{7}$ e $5555^{2222} \equiv (4)^{2222} \equiv [(4)^5]^{444} \cdot 4^2 \equiv 2 \pmod{7}$

Assim, $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é múltiplo de 7.

Questão 107 (Chile 2008)

Sejam a, b, c números reais, tais que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Se $a + b + c \neq 0$, prove que $a = b = c$.

Solução

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Como $a + b + c \neq 0$, então temos que $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Por M.A $\geq$ M.G, temos que:

$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$; $\frac{c^2 + b^2}{2} \geq cb$ e $\frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ e a igualdade vale só quando $a = b = c$. Logo se $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Se $a + b + c \neq 0$, então $a = b = c$.

Questão 108 (Vietnã 1962)

Resolva a equação $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

Solução

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$

$$= 1 \cdot [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x] = 1 - 3 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2x = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Questão 109 (Chile 1997)

Encontre todos os inteiros, tais que: $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Solução

Note que $(0, 0, 0)$ é solução. Suponhamos, por absurdo, que exista outra solução. Seja $S = \{(x, y, z)\}$ tais que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ e $x, y, z \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Daí se $S \neq \emptyset$, então S possui uma solução onde x é mínimo. Claramente, x é par.

Logo $x = 2a \Rightarrow 4a^3 + y^3 = 2z^3$, daí y é par, assim $y = 2b$, logo $2a^3 + 4y^3 = z^3$, daí temos que z é par, assim $z = 2c$, portanto temos que $a^3 + 2b^3 = 4c^3$, absurdo, pois (a, b, c) é solução com $a < x$ e x é a menor solução de S .

Questão 110 (Áustria 2004)

Encontre todos os inteiros a e b tais que: $(a + b^3) \cdot (a^3 + b) = (a + b)^4$.

Solução

$$(a + b^3) \cdot (a^3 + b) = (a + b)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 + a^3b^3 + ab + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab \cdot (4a^2 + 6ab + 4b^2 - a^2b^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab = 0 \text{ ou } (4a^2 + 6ab + 4b^2 - a^2b^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } [(2a + 2b)^2 - (ab - 1)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a + 2b + ab - 1) \cdot (2a + 2b - ab + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a + 2b + ab - 1) = 0 \text{ ou } (2a + 2b - ab + 1) = 0.$$

No primeiro caso, temos que $a(2 - b) = 1 - 2b \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{1-2b}{2-b} = 2 - \frac{3}{2-b} \Rightarrow 2 - b = \pm 1 \text{ ou } \pm 3 \Rightarrow b = 1 \text{ ou } -1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5, \text{ logo}$$

$a = -1$ ou 1 ou 5 ou 3 , respectivamente. O segundo caso é análogo.

Daí as soluções são $(0, b)$, $(a, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(-1, 3)$, $(5, 1)$.

Questão 111 (Bósnia - Herzegovina 2005 - adaptada)

Sejam a, b, c inteiros positivos tais que $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$. Prove que abc é cubo perfeito.

Solução

Por M.A $\geq$ M.G, temos que $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ e a igualdade só ocorre se $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Como, segundo o enunciado, a igualdade é verdadeira, de fato teremos $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Daí temos que $ac = b^2 \Rightarrow abc = b^3$, portanto abc é cubo perfeito.

Questão 112 (Espanha 2006)

Um número positivo x é tal que: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Mostre que $x^5 + \frac{1}{x^5}$ é inteiro e calcule seu valor.

Solução

$$\text{Seja } x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2 \Rightarrow a^2 - 2 = 7 \Rightarrow a = 3.$$

Daí temos que

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^5 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5} = 243 \Rightarrow$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} + 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 6 = 243 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 209.$$

Questão 113 (Portugal 1994)

Prove que o número $11\dots11 - 22\dots2$ (onde o primeiro número é formado por $2n$ algarismos 1 e o segundo número é formado por n algarismos 2) é um quadrado perfeito.

Solução

$$11\dots11 = \frac{-1+10^{2n}}{9} \text{ e } 22\dots22 = 2 \cdot \left(\frac{-1+10^n}{9} \right). \text{ Daí temos que:}$$

$$11 \dots 11 - 22 \dots 2 = \frac{-1 + 10^{2n}}{9} - 2 \cdot \left(\frac{-1 + 10^n}{9} \right) = \frac{1 - 2 \cdot 10^n + 10^{2n}}{9} = \left(\frac{-1 + 10^n}{3} \right)^2$$

De fato, o número proposto é um quadrado perfeito.

Questão 114 (Portugal 1994)

Ache o menor número natural que tem exatamente 1994 divisores.

Solução

Como queremos o menor número, temos que pegar os menores fatores primos no caso 2 e 3. Como $1994 = 2 \cdot (997)$, então o menor número que tem 1994 divisores é $3 \cdot 2^{996}$.

Questão 115 (República Tcheca e Eslovaca 1999)

Mostre que para todo número natural n o produto:

$$\left(4 - \frac{2}{1}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{2}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{3}\right) \dots \left(4 - \frac{2}{n}\right)$$

é um inteiro.

Solução

$$\text{Seja } S = \left(4 - \frac{2}{1}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{2}\right) \cdot \left(4 - \frac{2}{3}\right) \dots \left(4 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2 \cdot 1}{1} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3} \cdot \frac{2 \cdot (2n-1)}{n} = \frac{2^n \cdot I}{n!},$$

onde $I = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3) \cdot (2n-1)$. Temos então que todos os fatores ímpares de $n!$ vão se cancelar com os fatores ímpares de cima.

Falta-nos ver só os fatores 2. A quantidade de fatores 2 em $n!$ é $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$, onde 2^k é a maior potência de 2 menor do que n .

$$\text{Daí } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + \frac{n}{2^k} + \frac{n}{2^{k+1}} = \frac{\frac{n}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = n, \text{ logo embaixo nós}$$

temos menos de n fatores 2. Logo, S é inteiro.

Questão 116 (Singapura)

Calcule o valor de: $\frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 5^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 9^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \cot 89^\circ}$.

Solução

$$\frac{1}{1+\cot 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ + \sin 1^\circ} \text{ e } \frac{1}{1+\cot 89^\circ} = \frac{\cos 89^\circ}{\cos 89^\circ + \sin 89^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ + \sin 1^\circ}$$

$$\frac{1}{1+\cot 5^\circ} = \frac{\cos 5^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} \text{ e } \frac{1}{1+\cot 85^\circ} = \frac{\cos 85^\circ}{\cos 85^\circ + \sin 85^\circ} = \frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{1+\cot 41^\circ} = \frac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ + \sin 41^\circ} \text{ e } \frac{1}{1+\cot 49^\circ} = \frac{\cos 49^\circ}{\cos 49^\circ + \sin 49^\circ} = \frac{\sin 41^\circ}{\cos 41^\circ + \sin 41^\circ}$$

$$\text{Logo } \frac{1}{1+\cot 1^\circ} + \frac{1}{1+\cot 5^\circ} + \frac{1}{1+\cot 9^\circ} + \dots + \frac{1}{1+\cot 89^\circ} = 11 + \frac{1}{1+\cot 45^\circ} = \frac{23}{2}.$$

Questão 117 (Rússia 2000)

$$\text{Determine a soma: } S = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

Solução

Vamos calcular isso em duas partes:

$$A = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^5}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{999}}{3} \right\rfloor \text{ e } B = \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^4}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

Parte 1: Cálculo de A:

Note $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$; daí $2^1 \equiv 2 \pmod{3}$. Logo, $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$, para todo n natural, i.e., $2^{2n+1} = 3q + 2$ e daí $\left\lfloor \frac{2^{2n+1}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3q+2}{3} \right\rfloor = q$. Logo $\left\lfloor \frac{2^{2n+1}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-2+2^{2n+1}}{3} \right\rfloor$,

$$\text{então } A = \frac{-2+2^1}{3} + \frac{-2+2^3}{3} + \dots + \frac{-2+2^{999}}{3} = \frac{-2 \cdot (500) + \frac{-2+2^{1001}}{3}}{3} = \frac{-3002+2^{1001}}{9}.$$

Parte 2: Cálculo de B:

Note $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$; logo $2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$, para todo n natural, i.e., $2^{2n} = 3q + 1$ e daí $\left\lfloor \frac{2^{2n+1}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3q+1}{3} \right\rfloor = q$. Então $\left\lfloor \frac{2^{2n+1}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-1+2^{2n+1}}{3} \right\rfloor$,

$$\text{logo } B = \frac{-1+2^2}{3} + \frac{-1+2^4}{3} + \dots + \frac{-1+2^{1000}}{3} = \frac{-2 \cdot (500) + \frac{-4+2^{1002}}{3}}{3} = \frac{-3004+2^{1002}}{9}.$$

$$\text{Daí } S = A + B = \frac{-3002 + 2^{1001}}{9} + \frac{-3004 + 2^{1002}}{9} = \frac{-6006 + 2^{1001} + 2^{1002}}{9}.$$

Questão 118 (Repúblicas Tcheca e Eslovaca 2000)

Se n é um número natural, mostre que $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ é divisível por 13 se, e somente se, n é par.

Solução

Parte 1: Provemos, por indução, que se n é par então $3^{2^{2n}} \equiv 3 \pmod{13}$.

i) $3^{2^2} \equiv 3^{2^1} \cdot 3^{2^1} \equiv 9 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{13}$.

ii) $3^{2^{2k}} \equiv 3 \pmod{13}$. (H.I.).

iii) Mostremos que vale para $n = k + 1$: $3^{2^{2(k+1)}} = (3^{2^{2k}})^4 \equiv 3^4 \equiv 9 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{13}$

Portanto, a propriedade é válida para todo n natural.

Parte 2: Vou provar, por indução, que se n é par então $3^{2^{2n+1}} \equiv 9 \pmod{13}$.

i) $3^{2^1} \equiv 3^{2^1} \equiv 9 \pmod{13}$.

ii) $3^{2^{2k+1}} \equiv 9 \pmod{13}$. (H.I.).

iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 1$: $3^{2^{2(k+1)+1}} = (3^{2^{2k+1}})^4 \equiv 9^4 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{13}$

Portanto, a propriedade é válida para todo n natural.

Parte 3: Provemos, por indução, que se n é par, então $4^{2^{2n}} \equiv 9 \pmod{13}$.

i) $4^{2^2} \equiv 4^{2^1} \cdot 4^{2^1} \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{13}$.

ii) $4^{2^{2k}} \equiv 9 \pmod{13}$. (H.I.).

iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 1$: $4^{2^{2(k+1)}} = (4^{2^{2k}})^4 \equiv 9^4 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{13}$

Portanto a propriedade é válida para todo n natural.

Parte 4: Vou provar, por indução, que se n é par então $4^{2^{2n+1}} \equiv 3 \pmod{13}$.

i) $4^{2^1} \equiv 4^{2^1} \equiv 9 \pmod{13}$.

ii) $4^{2^{2k+1}} \equiv 3 \pmod{13}$. (H.I.).

iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 1$: $4^{2^{2(k+1)+1}} = (4^{2^{2k+1}})^4 \equiv 9^4 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{13}$

Portanto a propriedade é válida para todo n natural.

Daí se n é par, temos que $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n} \equiv 4 \cdot 3 + 3 \cdot 9 \equiv 39 \equiv 0 \pmod{13}$ e se

n é ímpar, $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n} \equiv 4 \cdot 9 + 3 \cdot 3 \equiv 45 \equiv 6 \pmod{13}$.

Logo, $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ é múltiplo de 13 se e somente se n é par.

Questão 119 (Hungria-Israel 1990)

Prove que não existem inteiros positivos x, y tais que $x^2 + y + 2$ e $y^2 + 4x$, sejam ambos quadrados perfeitos.

Solução

Se $y^2 + 4x$ é quadrado perfeito, então $4x > 2y \Rightarrow 2x > y$.

Se $x^2 + y + 2$ é quadrado perfeito, então $y + 2 > 2x \Rightarrow y > 2x - 2$.

Logo $2x > y > 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 1$, absurdo, pois $y^2 + 4x = 4x^2 + 1$ e $(2x)^2 < 4x^2 + 1 < (2x + 1)^2$.

Questão 120 (Índia)

Encontre todos os pares de inteiros não-negativos (x, y) tais que: $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

Solução

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2 \Leftrightarrow (xy - 6)^2 - (x + y)^2 = -13 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(xy - 6 - x - y)(xy - 6 + x + y)] = -13.$$

Temos então que: $(xy - 6 - (x + y)) = -13$ e $(xy - 6 + x + y) = 1$ ou $(xy - 6 - (x + y)) = -1$ e $(xy - 6 + x + y) = 13$.

No primeiro caso, temos que $xy - 6 = -6$ e $x + y = 7 \Rightarrow xy = 0$ e $x + y = 7 \Rightarrow \Rightarrow x = 0$ e $y = 7$ ou $x = 7$ e $y = 0$.

No segundo caso, temos que $xy - 6 = 6$ e $x + y = 7 \Rightarrow \Rightarrow xy = 12$ e $x + y = 7 \Rightarrow x = 3$ e $y = 4$ ou $x = 4$ e $y = 3$.

Soluções: $(x, y) = \{(3, 4), (4, 3), (0, 7), (7, 0)\}$.

Questão 121 (Uruguai 2001)

Calcule a soma: $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2001 \cdot 2^{2000}$.

Solução

$$\text{Seja } 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 2001 \cdot 2^{2000} \Rightarrow$$

$$2S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + 2001 \cdot 2^{2001}.$$

Subtraindo a segunda da primeira, temos que:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2000} + 2001 \cdot 2^{2001} = (2^{2001} - 1) + 2001 \cdot 2^{2001} = 2002 \cdot 2^{2001} - 1.$$

Questão 122 (Hong Kong 2000)

Se $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 43^\circ + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 43^\circ + \sin 44^\circ} = a + b\sqrt{c}$, calcule a, b, c .

Solução 1

$$\cos n + \sin n = \sqrt{2} (\cos 45^\circ \cdot \cos n + \sin 45^\circ \cdot \sin n) = \sqrt{2} \cos(45^\circ - n).$$

$$\text{Daí temos que } (\sin 1^\circ + \dots + \sin 44^\circ) + (\cos 1^\circ + \dots + \cos 44^\circ) =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 1^\circ + \dots + \cos 44^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 1^\circ + \dots + \sin 44^\circ) = (\sqrt{2} - 1) (\cos 1^\circ + \dots + \cos 44^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 43^\circ + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 43^\circ + \sin 44^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logo $a = b = 1$ e $c = 2$.

Solução 2

$$\cos 1^\circ + \cos 44^\circ = 2 \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{43^\circ}{2}$$

$$\cos 2^\circ + \cos 43^\circ = 2 \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{41^\circ}{2}$$

$$\cos 3^\circ + \cos 42^\circ = 2 \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{39^\circ}{2}$$

$$\dots \dots \dots$$
$$\cos 22^\circ + \cos 23^\circ = 2 \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{1^\circ}{2}$$

$$\sin 1^\circ + \sin 44^\circ = 2 \sin \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{43^\circ}{2}$$

$$\sin 2^\circ + \sin 43^\circ = 2 \sin \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{41^\circ}{2}$$

$$\sin 3^\circ + \sin 42^\circ = 2 \sin \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{39^\circ}{2}$$

$$\dots \dots \dots$$
$$\sin 22^\circ + \sin 23^\circ = 2 \sin \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{1^\circ}{2}$$

Daí temos que

$$\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 43^\circ + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 43^\circ + \sin 44^\circ} = \frac{2 \cos \frac{45^\circ}{2} \left(\cos \frac{43^\circ}{2} + \cos \frac{41^\circ}{2} + \dots + \cos \frac{1^\circ}{2} \right)}{2 \sin \frac{45^\circ}{2} \left(\cos \frac{43^\circ}{2} + \cos \frac{41^\circ}{2} + \dots + \cos \frac{1^\circ}{2} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Solução 3

Pelas fórmulas das questões 44 e 46 dos problemas de treinamento, temos que:

$$\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 43^\circ + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 43^\circ + \sin 44^\circ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Questão 123 (China 2003)

Seja $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right]$. Calcule o valor mínimo da expressão:

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Solução

Faça $z = -x - \frac{\pi}{6}$. Fácil ver que se $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right]$, então $z \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ e $2z \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Note que $\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cotg} z$, pois $x + \frac{2\pi}{3} + \left(-x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} z = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos z$. Daí temos que:

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cotg} z + \operatorname{tg} z + \cos z = \frac{2}{\sin 2z} + \cos z.$$

Como as funções $\frac{2}{\sin 2z}$ e $\cos z$ são decrescentes no intervalos $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que o valor máximo de y ocorre em $z = \frac{\pi}{6}$. Logo, o valor

$$\text{máximo de } y \text{ é } \frac{2}{\left(\sin \frac{2\pi}{6}\right)} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{11\sqrt{3}}{6}.$$

Questão 124 (Baltic Way 1992)

Denote por $d(n)$ o número de divisores positivos de um número natural n (incluindo 1 e n). Prove que existem infinitos n tais que $\frac{n}{d(n)}$ é inteiro.

Solução

Defina $a_1 = 2^1$, $a_2 = 2^2 \cdot 3^1$, $a_3 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^1$, $a_4 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^1$, ... onde cada expoente de um primo é o antecessor do primo seguinte e o expoente do último primo é 1. Dessa forma, $\frac{a_n}{d(a_n)}$ é inteiro. E a_n é uma sequência infinita, pois há infinitos números primos.

Questão 125 (Singapura 2008)

Calcule o valor da expressão: $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$.

Solução

$$\sin \frac{7\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} \text{ e } \sin \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{5\pi}{8}. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} &= 2 \left(\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} \right) = \\ &= 2 \left(\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left[\left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{8} \right] = \\ &= 2 \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Questão 126 (Singapura 2008)

Calcule o valor de $\frac{\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ}$.

Solução

Pelo lema 1 da questão 100, temos que: Se A , B , C ângulos de um triângulo, então vale que:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Como $40^\circ + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, temos que $\frac{\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ} = 1$.

Questão 127 (Alemanha 1998)

Prove que: $1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999$.

Solução

Pela questão número 76, temos que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2000 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999.$$

Também pela questão 76 temos que:

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{4} < \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{m^2} - \sqrt{-1+m^2} < \frac{1}{2\sqrt{-1+m^2}}$$

$$\sqrt{1+m^2} - \sqrt{m^2} < \frac{1}{2\sqrt{m^2}}$$

Somando membro a membro temos que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} > 2(\sqrt{1+m^2}) - 2\sqrt{2} > 2000 - 3 = 1997 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} > 1998.$$

Questão 128 (Inglaterra 2006)

Seja n um número inteiro. Mostre que se $2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ é inteiro, então $2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ é quadrado perfeito.

Solução

Se $\sqrt{1+12n^2}$ é inteiro, então $1 + 12n^2 = (2m + 1)^2 \Rightarrow 12n^2 = 4m(m + 1) \Rightarrow 3n^2 = m(m + 1)$. Como $\text{mdc}(m, m + 1) = 1$, então temos que $m = 3u^2$ e $m + 1 = v^2$ ou $m = a^2$ e $m + 1 = 3b^2$. O segundo caso é impossível, pois $m = 3b^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, assim m não pode ser quadrado perfeito. Daí temos

que $m = 3u^2$ e $m + 1 = v^2$, daí $2 + 2\sqrt{1 + 12n^2} = 2 + 2(2m + 1) = 4(m + 1) = (2v)^2$; logo $2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ é quadrado perfeito.

Questão 129 (Holanda 1991)

Três números reais satisfazem às equações:

$$a + b + c = 3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 9 \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 + c^3 = 24.$$

Calcule $a^4 + b^4 + c^4$.

Solução

Como $a + b + c = 3 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 9 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 9 \Rightarrow (ab + bc + ac) = 0$.

i) Se $a + b + c = 3 \Rightarrow a^2b + ab^2 + abc = 3ab$ (multiplicando por ab)

ii) Se $a + b + c = 3 \Rightarrow a^2c + ac^2 + abc = 3ac$ (multiplicando por ac)

iii) Se $a + b + c = 3 \Rightarrow b^2c + bc^2 + abc = 3bc$ (multiplicando por bc)

Somando as três igualdades, temos que:

$$\begin{aligned} a^2b + ab^2 + abc + a^2c + ac^2 + abc + b^2c + bc^2 + abc &= 3(ab + bc + ac) \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 \cdot (a + c) + a^2 \cdot (b + c) + c^2 \cdot (a + b) + 3abc &= 3(ab + bc + ac) \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 \cdot (3 - b) + a^2 \cdot (3 - a) + c^2 \cdot (3 - c) + 3abc &= 3(ab + bc + ac) \Rightarrow \\ \Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc &= 3(ab + bc + ac) \Rightarrow 24 - 3 \cdot (9) + \\ + 3abc &= 0 \Rightarrow abc = 0. \end{aligned}$$

Como $(ab + bc + ac) = 0 \Rightarrow (ab + bc + ac)^2 = 0 \Rightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc(a + b + c) = 0 \Rightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = 0$.

Como $a^2 + b^2 + c^2 = 9 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 81 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2[(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2] = 81 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 81$.

Questão 130 (Baltic Way 1995)

Sejam a, b, c números inteiros positivos, com a e c ímpares, a, b, c primos entre si e tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Prove que $b + c$ é quadrado perfeito.

Solução

Como a e c são ímpares, temos que b é par. Seja $c - b = k$, onde k é ímpar. Daí temos que $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = (c + b) \cdot k$. Vejamos que $k = 1$. Suponhamos, por absurdo, que $k > 1$. Daí existe um fator primo p , tal que $p|k$, i.e., existe um s natural tal que $p \cdot s = k$. Daí temos que $p|a$, logo existe um m natural tal que $a = p \cdot m$. Então, temos que $p^2 \cdot m^2 = b^2 + b^2 + 2bps + p^2 \cdot s^2 \Rightarrow p \cdot (pm^2 - ps^2 - 2bs) = 2b^2$; como $\text{mdc}(2, p) = 1$ (pois p é ímpar), temos que $p|b$, logo $p = 1$ (pois $\text{mdc}(a, b) = 1$). Logo $k = 1 \Rightarrow a^2 = (c + b)$, e $b + c$ é quadrado perfeito.

Questão 131 (Finlândia 2000)

Prove que $\lfloor (3 + \sqrt{5})^n \rfloor$ é um número ímpar para todo natural n .

Solução

Note que $0 < (3 - \sqrt{5})^n < 1$, para todo n natural, pois $0 < (3 - \sqrt{5}) < 1$. Observe também que $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ é par, pois os termos de ordem ímpar (do desenvolvimento binomial) irão se cancelar e os de ordem par serão multiplicados por 2, i.e., se $n = 2k$, então teremos:

$$(3 + \sqrt{5})^{2k} + (3 - \sqrt{5})^{2k} = 2 \cdot [3^{2k} \cdot (\sqrt{5})^0 + 3^{2k-2} \cdot (\sqrt{5})^2 + \dots + 3^2 \cdot (\sqrt{5})^{2k-2} + 3^0 \cdot (\sqrt{5})^{2k}]$$

E se n for ímpar é análogo. Daí temos que $\lfloor (3 + \sqrt{5})^n \rfloor$ é um número ímpar para todo natural n .

Questão 132 (Finlândia 2000)

Encontre todos os números naturais n tais que $n! > \sqrt{n^n}$.

Solução

Para $n = 1$ ou $n = 2$ a propriedade não vale.

Lema: $n^n > (n+1)^{n-1}$, para todo natural $n > 1$.

Prova:

$$n^n > (n+1)^{n-1} \iff (n+1) \cdot n^n > (n+1)^n \iff n+1 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ e como } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

então vale o lema.

Agora vamos ao problema:

Vou provar que $n! > \sqrt{n^n}$ para todo n natural $n > 2$, por indução:

i) $n = 3$, temos que $(3!) > \sqrt{3^3}$.

ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$:

$$k! > \sqrt{k^k} \quad (\text{H.I.})$$

iii) Vou mostrar que vale para $n = k+1$:

$$(k+1)!^2 > (k!)^2 \cdot (k+1)^2 > k^k \cdot (k+1)^2 > (k+1)^{k-1} \cdot (k+1)^2 > (k+1)^{k+1}, \text{ logo vale a propriedade.}$$

Assim $n! > \sqrt{n^n}$ para todo n natural $n \geq 3$.

Questão 133 (Holanda 1983)

Prove que se n é um inteiro positivo ímpar, então os dois últimos algarismos de $2^{2n} \cdot (2^{2n+1} - 1)$ na base 10 são 28.

Solução

Lema: Para todo n natural ímpar, temos que $40 \cdot 2^{2k} \equiv 60 \pmod{100}$.

Prova:

Vou provar isso por indução:

- i) Para $n = 1$, temos que $40 \cdot 2^{2k} \equiv 60 \pmod{100}$.
- ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$ (onde k é ímpar), i.e:

$$40 \cdot 2^{2k} \equiv 60 \pmod{100} \text{ (H.I.)}$$

- iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 2$:

$$40 \cdot 2^{2k+4} \equiv 16 \cdot (40 \cdot 2^{2k}) \equiv 16 \cdot 60 \equiv 960 \equiv 60 \pmod{100}.$$

Portanto a propriedade é válida para todo n natural ímpar.

Agora vamos ao problema:

Vou provar isso por indução que $2^{2n} \cdot (2^{2n+1} - 1) \equiv 28 \pmod{100}$, para n natural ímpar.

- i) Para $n = 1$, temos que $2^{2n} \cdot (2^{2n+1} - 1) = 28$.
- ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$ (onde k é ímpar), i.e:

$$2^{2k} \cdot (2^{2k+1} - 1) = 2^{4k+1} - 2^{2k} \equiv 28 \pmod{100} \text{ (H.I.)}$$

- iii) Vou mostrar que vale para $n = k + 2$:

$$\begin{aligned} 2^{2k+4} \cdot (2^{2k+5} - 1) &= 16 [2^{2k} \cdot (2^{2k+3} - 1)] = 4 \cdot [2^{2k} \cdot 2^{2k+5} - 2^{2k}] = 16 \cdot [16 \cdot (2^{4k+1}) - 2^{2k}] = \\ &= 256(2^{4k+1}) - 16 \cdot 2^{2k} \equiv 256 \cdot (2^{2k} + 28) - 16 \cdot 2^{2k} \equiv 240 \cdot 2^{2k} + 256 \cdot 28 \equiv 40 \cdot 2^{2k} + 68 \equiv \\ &\equiv 60 + 68 \equiv 128 \equiv 28 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Portanto a propriedade é válida para todo n natural ímpar.

Questão 134 (Holanda 1982)

Determine $\text{mdc}(n^2 + 2, n^3 + 1)$, onde $n = 9^{753}$.

Solução

Vou mostrar que $\text{mdc}(n^2 + 2, n^3 + 1) = 1$.

Seja $d = \text{mdc}(n^2 + 2, n^3 + 1)$, então temos que $d \mid (n^2 + 2)$ e $d \mid (n^3 + 1)$

Logo, $d \mid n^3 + 2n - (n^3 + 1) \Rightarrow d \mid (2n - 1)$.

Temos então que $d \mid (2n - 1)$ e $d \mid (n^2 + 2) \Rightarrow d \mid 2 \cdot (n^2 + 2) - n(2n - 1)$

$$\Rightarrow d \mid (n + 4).$$

Assim, temos que $d \mid (2n - 1)$ e $d \mid (n + 4) \Rightarrow d \mid 2 \cdot (n + 4) - (2n - 1)$

$$\Rightarrow d \mid 9 \Rightarrow d = 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } d = 9.$$

Como $n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n^2 + 2 \equiv 2 \pmod{3}$, logo vemos que $d = 1$.

Questão 135 (Holanda 1995)

Um canguru encontra-se num plano cartesiano. São permitidos dois tipos de saltos:

- i) 1 para a direita e 3 para cima
- ii) 2 para a esquerda e 4 para baixo

- a) Prove que o canguru pode partir do ponto $(0, 0)$ e chegar ao ponto $(19, 95)$ e determine o número de saltos necessários para isso.
- b) Prove que partindo do ponto $(1, 0)$ o canguru não pode chegar ao ponto $(19, 95)$.
- c) Partindo do ponto $(0, 0)$ determine todos os pontos (m, n) com $m, n \geq 0$, tais que o canguru pode alcançar.

Solução

a) No movimento (i) temos que:

Antes	Depois
(x, y)	$(x + 1, y + 3)$

No movimento (ii) temos que:

Antes	Depois
(x, y)	$(x - 2, y - 4)$

Se partirmos do ponto $(0, 0)$ e realizarmos n movimentos (i) e m movimentos (ii), chegaremos ao ponto $(n - 2m, 3n - 4m)$. Daí temos que:

$$\begin{cases} n - 2m = 19 \\ 3n - 4m = 95 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos que $n = 57$ e $m = 19$. Logo é possível chegar ao ponto $(19, 95)$ realizando 76 movimentos, sendo 57 do tipo (i) e 19 do tipo (ii).

b) Analogamente à letra a, temos que: $\begin{cases} n - 2m = 18 \\ 3n - 4m = 95 \end{cases}$

Claramente, esse sistema não tem solução natural.

c) $\begin{cases} n - 2m = a \\ 3n - 4m = b \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, temos que $n = b - 2a$ e $m = \frac{b - 3a}{2}$. Assim temos que $b - 2a \geq 0$ e $\frac{b - 3a}{2} \geq 0$ e naturais. Daí a solução são os pares (a, b) onde a e b são inteiros, $b \geq 2a$ e $b - 3a$ é um número natural par.

Questão 136 (África do Sul 1997)

Determine todos os inteiros não-negativos x, y tais que $1 + 3^x = 2^y$.

Solução

$(0, 1)$ e $(1, 2)$ claramente são soluções. Entretanto, se $y \geq 3$, então $2^y - 1 \equiv 7 \pmod{8}$ e $3^x \equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$, portanto não havendo outras soluções.

Questão 137 (Polônia)

Ache todos os inteiros x, y tais que: $x^2 \cdot (y - 1) + y^2 \cdot (x - 1) = 1$.

Solução:

Faça $x = u + 1$ e $y = v + 1$. Daí temos que $(u + 1)^2 \cdot v + (v + 1)^2 \cdot u = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow uv \cdot (u + v + 4) + u + v = 1 \Rightarrow uv \cdot (u + v + 4) + u + v + 4 = 1 + 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (uv + 1) \cdot (u + v + 4) = 5$.

Daí temos 4 possibilidades:

Possibilidade 1: $(uv + 1) = 1$ e $(u + v + 4) = 5$

Neste caso temos que $u = 1 - v$ (pela segunda). Substituindo na primeira, temos que $v \cdot (1 - v) = 0 \Rightarrow v = 0$ ou $1 \Rightarrow x = 1$ ou $2 \Rightarrow y = 1$ ou 2 . Logo a solução da possibilidade 1 é $(1, 2)$ ou $(2, 1)$.

Possibilidade 2: $(uv + 1) = 5$ e $(u + v + 4) = 1$

De maneira análoga ao primeiro caso, vemos que essa possibilidade não tem solução.

Possibilidade 3: $(uv + 1) = -1$ e $(u + v + 4) = -5$

Analogamente ao primeiro caso, vemos que essa possibilidade não tem solução.

Possibilidade 4: $(uv + 1) = -5$ e $(u + v + 4) = -1$

Analogamente ao primeiro caso, vemos que essa possibilidade tem como solução $(-2, 5)$ e $(5, -2)$.

Questão 138 (Romênia)

Encontre todos os inteiros positivos x, y, z tais que: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$.

Solução

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $2 \leq x \leq y \leq z$.

Daí temos que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{3}{5} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 5$.

Assim, temos 4 casos a analisar:

Caso 1: $x = 2$

Se $x = 2$, então temos que $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$.

Como $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{2}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \Rightarrow y \leq 20$. Logo $y \in \{11, 12, 13, \dots, 19, 20\}$.

Por inspeção achamos as soluções:

$(2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)$.

Caso 2: $x = 3$

Com um raciocínio análogo ao caso 1, achamos as soluções $(3, 4, 60), (3, 5, 15), (3, 6, 10)$.

Caso 3: $x = 4$

Com um raciocínio análogo ao caso 1, achamos a solução $(4, 4, 10)$.

Caso 4: $x = 5$

Com um raciocínio análogo ao caso 1, achamos a solução $(5, 5, 5)$.

Questão 139) (Rússia 1963)

Sejam a, b inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$, prove que $\text{mdc}(a^2 + b^2, a + b) = 1$ ou 2 .

Solução

Seja $d = \text{mdc}(a^2 + b^2, a + b)$ então $d \mid (a^2 + b^2)$ e $d \mid (a + b) \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab \Rightarrow d \mid 2a(a + b) - 2ab = 2a^2$.

Analogamente, prova-se que $d \mid 2b^2$ e, como $\text{mdc}(a, b) = 1$, temos que $d \mid 2$, logo $d = 1$ ou $d = 2$.

É fácil ver que se $a = b = 1$, temos que $\text{mdc}(a^2 + b^2, a + b) = 2$ e se $a = 1$ e $b = 2$, temos que $\text{mdc}(a^2 + b^2, a + b) = 1$.

Questão 140 (Rússia 1962)

Seja o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Prove que não existem inteiros a, b, c, d tais que $P(19) = 1$ e $P(62) = 2$.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que existisse tais a, b, c, d . Daí teríamos que:

$$19^3a + 19^2b + 19c + d = 1 \text{ e } 62^3a + 62^2b + 62c + d = 2$$

$$a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1$$

$a(43)(62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2) + b \cdot 43 \cdot 81 + 43c = 1$, absurdo, pois o primeiro membro é múltiplo de 43 e o segundo não.

Questão 141 (Chile 2006)

Ache o maior número C tal que para todo x se verifica a desigualdade $x^2 \geq C \cdot \lfloor x \rfloor \cdot \{x\}$.

Solução

Seja $n = \lfloor x \rfloor$ e $m = \{x\}$. Daí temos que $x = m + n$ e $(m + n)^2 \geq C \cdot m \cdot n$.

Para $C = 4$, temos que $(m + n)^2 \geq 4mn \Leftrightarrow (m - n)^2 \geq 0$.

Agora se $C > 4$, tome $n = 1$, daí temos que:

$$(1 + m)^2 \geq C \cdot m \Rightarrow m^2 + (2 - C) \cdot m + 1 \geq 0.$$

Como $f(m) = m^2 + (2 - C) \cdot m + 1$ é uma função do segundo grau, temos que f é contínua e como $f(1) = 4 - C < 0$ e $f(0) = 1$, temos pelo teorema do valor

intermediário que existe um $m \in (0, 1)$ tal que $f(m) = \frac{4 - C}{2} < 0$, portanto, a desigualdade é falsa. Concluimos que o maior valor de C é 4.

Questão 142 (Irlanda)

Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaz às condições:

- i) $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$, se $\text{mdc}(a, b) = 1$
- ii) $f(p + q) = f(p) + f(q)$, se $\text{mdc}(p, q) = 1$

Mostre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

Solução

Seja p um número primo ímpar, então $f(2p) = f(2) \cdot f(p)$.

Como, $f(2p) = f(p) + f(p) = 2 \cdot f(p) \Rightarrow f(2) = 2$.

Além disso, $f(4) = f(2) + f(2) \Rightarrow f(12) = 4 \cdot f(3)$.

Por outro lado $f(12) = f(7) + f(5) = [2 \cdot f(2) + f(3)] + [f(2) + f(3)] = 6 + 2 \cdot f(3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(3) = 3$.

Finalmente

$f(5) = f(2) + f(3) = 5 \Rightarrow f(15) = 15 \Rightarrow f(13) = 13 \Rightarrow f(26) = 26 \Rightarrow f(23) = 23$.

Mas, $f(13) = 13 \Rightarrow f(11) = 11 \Rightarrow f(33) = 33 \Rightarrow f(31) = 31 \Rightarrow f(29) = 29$.

Logo $f(2001) = f(3) \cdot f(23) \cdot f(29) = 2001 \Rightarrow f(1999) = 1999$.

Questão 143 (Grécia 2000)

Determine o número primo p tal que $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ é um quadrado perfeito.

Solução

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = t^2 \Rightarrow \left(p^2 + \frac{p}{2} + 1\right)^2 = t^2 + \frac{5p^2}{4} \Rightarrow |t| \leq p^2 + \frac{p}{2} + 1$$

$$\text{Por outro lado, temos que: } \left(p^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(p^2 + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = t^2 \Rightarrow |t| > p^2 + \frac{p}{2}$$

Note que p é ímpar, pois $p = 2$ não é solução. Assim temos que
 $|t| = p^2 + \frac{p}{2} + \frac{1}{2}$. Substituindo na equação e simplificando, temos que
 $-3 - 2p + p^2 = 0 \Rightarrow p = -1$ ou $p = 3$. Logo $p = 3$ é a única solução.

Questão 144 (Eslovênia)

Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que: $f(x - f(y)) = 1 - x - y$, para todo x, y reais.

Solução

$$\text{Faça } x = y + f(y) \Rightarrow f(y) = 1 - (f(y) + y) - y \Rightarrow 2 \cdot f(y) = 1 - 2y \Rightarrow f(y) = \frac{1}{2} - y.$$

Logo $f(x) = \frac{1}{2} - x$. Substituindo esta função na equação original, vemos facilmente que ela satisfaz.

Questão 145 (IMO 1963)

$$\text{Prove que } \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Solução 1

$$\begin{aligned}
 -\cos \frac{2\pi}{7} &= \cos \frac{5\pi}{7} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \\
 &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{-\sin 0 + \sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}, \text{ pois } \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}.
 \end{aligned}$$

Solução 2

Sabemos que $\cos \alpha = \frac{e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}}{2}$.

Daí temos que

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{-i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{\pi}{7}}}{2} - \frac{e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{2\pi}{7}}}{2} + \frac{e^{-i\frac{3\pi}{7}} + e^{i\frac{3\pi}{7}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Fazendo $w = e^{i\frac{\pi}{7}}$, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{w^{-1} + w^1}{2} - \frac{w^{-2} + w^2}{2} + \frac{w^{-3} + w^3}{2} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow w^{-1} + w^1 - w^{-2} - w^2 + w^{-3} + w^3 = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{1+w^1}{w} - \frac{1+w^2}{w^2} + \frac{1+w^3}{w^3} &= 1 \Leftrightarrow w^6 - w^5 + (-w^3) + w^2 - w^{-3} + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Pela fórmula da soma dos termos da P.G. temos que:

$$w^6 - w^5 + (-w^3) + w^2 - w^{-3} + 1 = \frac{(-w)^7 - 1}{-w - 1} = 0, \text{ pois } (w)^7 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1.$$

Solução 3

Note que $3\frac{\pi}{7} + 4\frac{\pi}{7} = \pi$, $3\frac{3\pi}{7} + 4\frac{3\pi}{7} = 3\pi$ e $3\frac{5\pi}{7} + 4\frac{5\pi}{7} = 5\pi$, logo $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$ são soluções da equação $\cos 4x = -\cos 3x \Rightarrow \cos 4x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \Rightarrow 2 \cdot \cos \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{7x}{2} = 0$ ou $\cos \frac{x}{2} = 0$.

Parte 1: Resolver a equação $\cos \frac{7x}{2} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}; \text{ mas } \cos \frac{\pi}{7} &= \cos \frac{13\pi}{7}, \\
 \cos \frac{3\pi}{7} &= \cos \frac{11\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7} = \cos \frac{9\pi}{7}. \text{ Logo há 4 soluções distintas } \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi.
 \end{aligned}$$

Parte 2: Resolver a equação $\cos \frac{x}{2} = 0$.

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, \text{ logo } x = \pi \text{ é a única solução.}$$

Por outro lado, temos que:

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \text{ e } \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\cos 4x = -\cos 3x \Rightarrow 8 \cos^4 x + 4 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = 0, \text{ onde } t = \cos x. \text{ Claramente } -1 \text{ é raiz desse}$$

polinômio. Temos então $8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = (t + 1) \cdot (8t^3 - 4t^2 - 4t + 1)$, e o

polinômio $8t^3 - 4t^2 - 4t + 1$ tem como raízes $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, $\cos \frac{5\pi}{7}$.

Pelas relações de Girard, temos:

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}.$$

Questão 146 (Bulgária 2008)

Prove que existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(f(n)) = 3n$, para todo n natural.

Solução

Defina a seguinte função:

$$f(n) = \begin{cases} 6n, & \text{se o expoente de 2 na fatoração prima de } n \text{ for par} \\ \frac{n}{2}, & \text{se o expoente de 2 na fatoração prima de } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Note que $f(f(n)) = 3n$, pois:

Caso 1: se o expoente de 2 na fatoração prima de n for par.

Neste caso, temos que $f(n) = 6n$. Daí, o expoente de 2 em $6n$ é ímpar, assim

$$f(f(n)) = \frac{6n}{2} = 3n.$$

Caso 2: se o expoente de 2 na fatoração prima de n for ímpar.

Neste caso, temos que $f(n) = \frac{n}{2}$, daí o expoente de 2 em $6n$ é par, assim

$$f(f(n)) = \frac{6n}{2} = 3n.$$

Obs: Na verdade, com um raciocínio análogo a esse, podemos provar algo mais geral:

Seja p é um número primo qualquer, prove que existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(f(n)) = p \cdot n$, para todo n natural.

Questão 147 (Romênia 2003)

Mostre que para todo n natural, a parte fracionária de $\sqrt{n+4n^2}$ não é maior do que 0,25.

Solução

Note que $(2n)^2 < 4n^2 + n < (2n+1)^2$, logo a parte inteira de $\sqrt{n+4n^2}$ é $2n$. Assim a sua parte fracionária é $\sqrt{n+4n^2} - 2n$.

Agora suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{n+4n^2} - 2n > \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{n+4n^2} > 2n + \frac{1}{4} \Rightarrow \Rightarrow 4n^2 + n > 4n^2 + n + \frac{1}{16}$, absurdo!. Logo, temos que $\sqrt{n+4n^2} - 2n \leq \frac{1}{4}$.

Sua parte fracionária é menor ou igual $\frac{1}{4}$.

Questão 148 (Estônia 2009)

Encontre todos os inteiros positivos (x, y, z) tais que $99x + 100y + 101z = 2009$.

Solução

Note que $99x + 99y + 99z < 99x + 100y + 101z < 101x + 101y + 101z \Rightarrow \Rightarrow 19 < \frac{2009}{101} \leq x + y + z \leq \frac{2009}{99} < 21$, logo temos que $x + y + z = 20$.

Agora temos que $99x + 100y + 101z = 100 \cdot (x + y + z) - x + z = 2009 \Rightarrow \Rightarrow -x + z = 9 \Rightarrow z = 9 + x$. Como $x + y + z = 20$, temos que $x + y + (x + 9) = 20 \Rightarrow y = 11 - 2x \Rightarrow x = 1$ ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 . Por inspeção temos que as soluções são $(1, 9, 10)$, $(2, 7, 11)$, $(3, 5, 12)$, $(4, 3, 13)$, $(5, 1, 14)$.

Questão 149 (Estônia 1994)

Prove que $n!$ termina em menos de $\frac{n}{4}$ zeros para todo n natural.

Solução

A quantidade de zeros de $n!$ é $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$, mas

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^k} = \frac{\frac{n}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{n}{4}$$

Questão 150 (México 1988)

Se a e b são números inteiros positivos. Prove que $11a + 2b$ é múltiplo de 19 se e somente se $18a + 5b$ também é.

Solução

Note $2 \cdot (11a + 2b) + 3 \cdot (18a + 5b) = 19 \cdot (4a + b)$, logo se $2 \cdot (11a + 2b)$ é múltiplo de 19, então $3 \cdot (18a + 5b)$ é múltiplo de 19, portanto $(18a + 5b)$ é múltiplo de 19. A recíproca é análoga.

Questão 151 (Estônia 2001)

Determine todos os números naturais a tais que a equação $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + \dots + |x - 2000| + |x - 2001| = a$, possui uma única solução, determine a .

Solução

É fácil ver que se t é solução, então $2002 - t$ também é solução de $|t - 1| + |t - 2| + |t - 3| + |t - 4| + \dots + |t - 2000| + |t - 2001| = a$.

Devemos ter $2002 - t = t \Rightarrow t = 1001$; portanto $a = 1000 + 999 + \dots + 1 + 0 + 1 + 2 + \dots + 999 + 1000 = (1000 + 1) + (999 + 2) + \dots + (2 + 999) + (1 + 1000) = 1000 \cdot 1001 = 1001000$.

Questão 152 (México 1991)

A soma dos quadrados de dois números inteiros consecutivos pode ser quadrado perfeito, por exemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Prove que a soma dos quadrados m inteiros consecutivos não pode ser um quadrado perfeito se $m = 3$ ou 6 e dê um exemplo de 11 inteiros consecutivos, tais que a soma dos seus quadrados seja um quadrado perfeito.

Solução

Parte 1: Caso $m = 3$.

$(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 3n^2 + 2$, que não é quadrado, pois $3n^2 + 2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Parte 2: Caso $m = 6$.

$(t - 2)^2 + (t - 1)^2 + t^2 + (t + 1)^2 + (t + 2)^2 + (t + 3)^2 = 6t^2 + 6t + 19$

Caso 1: $t \equiv 0 \pmod{4}$

Neste caso, temos que $6t^2 + 6t + 19 \equiv 19 \equiv 3 \pmod{4}$ que não é quadrado.

Caso 2: $t \equiv 1 \pmod{4}$

Neste caso, temos que $6t^2 + 6t + 19 \equiv 31 \equiv 3 \pmod{4}$ que não é quadrado.

Caso 3: $t \equiv 2 \pmod{4}$

Neste caso, temos que $6t^2 + 6t + 19 \equiv 55 \equiv 3 \pmod{4}$ que não é quadrado.

Caso 4: $t \equiv 3 \pmod{4}$

Neste caso, temos que $6t^2 + 6t + 19 \equiv 91 \equiv 3 \pmod{4}$ que não é quadrado.

Parte 3: Dê um exemplo de 11 inteiros consecutivos tais que a soma dos seus quadrados seja um quadrado perfeito.

$$(t-5)^2 + (t-4)^2 + (t-3)^2 + (t-2)^2 + (t-1)^2 + t^2 + (t+1)^2 + (t+2)^2 + (t+3)^2 + (t+4)^2 + (t+5)^2 = 11t^2 + 110. \text{ Daí basta tomarmos } t = 1.$$

Questão 153 (Chile 1997)

Para cada n inteiro positivo n , seja $K_n = n^2 + n + 1$. Prove que K_n não é quadrado perfeito para todo inteiro positivo n .

Solução

Como $K_n = n^2 + n + 1 \Rightarrow n^2 < K_n < (n+1)^2$ assim temos que K_n não é quadrado perfeito para todo inteiro positivo n .

Questão 154 (Rússia)

Encontre todos os pares de naturais (a, b) com a seguinte propriedade: $a^2 + b$ e $b^2 + a$ são ambos quadrados perfeito.

Solução

Se $a^2 + b$ e $b^2 + a$ são ambos quadrados perfeito, então $a^2 + b \geq (a+1)^2 \Rightarrow b > 2a$. Analogamente $a > 2b \Rightarrow 2a > 4b \Rightarrow b > 2a > 4b$, absurdo.

Questão 155 (Massachusetts 2007)

Prove as identidades:

$$a) \cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$$

$$b) \cos x + \cos 3x = \frac{\sin 4x}{2 \sin x}$$

$$c) \cos x + \cos 3x + \cos 5x = \frac{\sin 6x}{2 \sin x}$$

$$d) \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = \frac{\sin 8x}{2 \sin x}$$

$$e) \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-3)x + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

Solução

Vamos fazer somente a letra e. As demais letras são casos particulares da letra e. Note que os arcos dos cossenos estão em P.A. Daí podemos usar a fórmula da questão 46 do capítulo 2. Temos que:

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-3)x + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx \cdot \cos 0^0}{2 \sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

Questão 156 (Rússia 1983)

Se a e b são ângulos agudos, tais que:

$$\sin^2 a + \sin^2 b = \sin(a+b), \text{ prove que } a+b = \frac{\pi}{2}.$$

Solução

$$\text{Se } \sin^2 a + \sin^2 b = \sin(a+b) \Rightarrow$$

$$\sin^2 a + \sin^2 b = \sin a \cos b + \sin b \cos a \Rightarrow$$

$$\sin a (\sin a - \cos b) = \sin b (\cos a - \sin b).$$

Como $\sin a > 0$ e $\sin b > 0$, temos três casos a analisar:

$$(\sin a - \cos b) > 0 \text{ e } (\cos a - \sin b) > 0 \text{ ou}$$

$$(\sin a - \cos b) < 0 \text{ e } (\cos a - \sin b) < 0 \text{ ou}$$

$$(\sin a - \cos b) = 0 \text{ e } (\cos a - \sin b) = 0.$$

Vamos mostrar que os dois primeiros casos são impossíveis. Logo devemos ter $(\sin a - \cos b) = 0$ e $(\cos a - \sin b) = 0$.

Caso 1: $(\sin a - \cos b) > 0$ e $(\cos a - \sin b) > 0$.

$$\text{Se } (\sin a - \cos b) > 0 \text{ e } (\cos a - \sin b) > 0 \Rightarrow \sin a > \cos b \text{ e}$$

$$\cos a > \sin b \Rightarrow (\sin a)^2 > (\cos b)^2 \text{ e } (\cos a)^2 > (\sin b)^2 \Rightarrow$$

$$(\sin a)^2 + (\cos^2 a)^2 > (\cos b)^2 + (\sin^2 b)^2 \Rightarrow 1 > 1, \text{ absurdo.}$$

Caso 2: $(\sin a - \cos b) < 0$ e $(\cos a - \sin b) < 0$.

$$\text{Se } (\sin a - \cos b) < 0 \text{ e } (\cos a - \sin b) < 0 \Rightarrow \sin a < \cos b \text{ e}$$

$$\cos a < \sin b \Rightarrow (\sin a)^2 < (\cos b)^2 \text{ e } (\cos a)^2 < (\sin b)^2 \Rightarrow$$

$$(\sin a)^2 + (\cos^2 a)^2 < (\cos b)^2 + (\sin^2 b)^2 \Rightarrow 1 < 1, \text{ absurdo.}$$

Portanto temos que $(\sin a - \cos b) = 0$ e $(\cos a - \sin b) = 0 \Rightarrow \sin a = \cos b$

$$\text{e } \cos a = \sin b \Rightarrow \sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right). \text{ Como } 0 \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - b \leq 0.$$

Temos também que $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$. Assim, temos que $\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} - b \Leftrightarrow a + b = \frac{\pi}{2}.$$

Questão 157 (Canadá 1974)

Seja ABCD um retângulo $BC = 3AB$. Se P e Q são pontos sobre BC, tais que $BP = PQ = QC$, prove que:

$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC.$$

Solução

Seja $\alpha = \angle DQC$, $\beta = \angle DPC$ e $\gamma = \angle DBC$. Seja $AB = x$, então temos que $BC = 3x$, $BP = PQ = QC = x$. Daí temos que $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}$.

$$\text{Note que } \operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

Como $\alpha < 90^\circ$ e $\beta + \gamma < 180^\circ$ e $\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \beta + \gamma = \alpha$.

Questão 158 (Canadá 1969)

Sejam a, b, c lados de um triângulo. A bissetriz do ângulo C corta AB no ponto D .

$$\text{Prove que } CD = \frac{ab \cdot \cos \frac{C}{2}}{a + b}.$$

Solução

Seja $x = CD$, temos $S(BCD) = \frac{1}{2} \cdot ax \sin \frac{C}{2}$, $S(ACD) = \frac{1}{2} \cdot bx \sin \frac{C}{2}$ e

$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot ab \sin C$. Por outro lado, observe que $S(ABC) = S(BCD) + S(ACD) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot ab \sin C &= \frac{1}{2} \cdot ax \sin \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \cdot bx \sin \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot ab \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ax \sin \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \cdot bx \sin \frac{C}{2} \Rightarrow ab \cdot \cos \frac{C}{2} = x \cdot (a + b) \Rightarrow x = \frac{ab \cdot \cos \frac{C}{2}}{a + b}. \end{aligned}$$

Nota: $S(BCD)$ denota a área do triângulo BCD ; $S(ACD)$ denota a área do triângulo ACD ; $S(ABC)$ denota a área do triângulo ABC .

Questão 159 (Bulgária 1999)

Seja M o ponto médio do lado BC de um triângulo ABC no qual $\angle CAB = 45^\circ$ e $\angle ABC = 30^\circ$.

a) Determine $\angle AMC$.

b) Prove que $AM = \frac{AB \cdot BC}{2 \cdot AC}$.

Solução

a) Como $\angle CAB = 45^\circ$ e $\angle ABC = 30^\circ \Rightarrow \angle ACB = 105^\circ$.

$$\sin 105^\circ = \sin (60 + 45) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Usando a lei dos senos no triângulo ABC, temos que:

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow b = a \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } c = a \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right)$$

Faça $x = AM$. Usando a lei do cossenos no triângulo ABM, temos que:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(a \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \right)^2 - 2 \left(\frac{a}{2} \right) \left(a \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = a \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Note que $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Daí temos que

$$x = a \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

Usando a lei dos senos no triângulo AMC, temos que:

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin \alpha} = \frac{a \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

b) Da letra a, temos que $AB = a \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right)$, $BC = a$, $AM = a \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ e

$AC = a \frac{\sqrt{2}}{2}$. Daí temos que:

$$\frac{AB \cdot BC}{2 \cdot AC} = \frac{a \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) a}{2a \frac{\sqrt{2}}{2}} = a \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = AM$$

Questão 160 (KRMO 1997)

Um trapézio possui diagonais perpendiculares e altura 10. Encontre a área do trapézio, sabendo que uma de suas diagonais mede 13.

Solução

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $BD = 13$.

Sejam $AP = y$, $CP = z$, $BP = x$. Daí temos que $DP = 13 - x$. Note que como $AB \parallel CD$, temos que $\angle BDC = \angle ABP$ e $\angle PAB = \angle PCD$; logo os triângulos ABP e CDP são semelhantes. Temos então:

$$\frac{x}{13-x} = \frac{y}{z} \Rightarrow z = \frac{(13-x) \cdot y}{x}$$

Prolongue CD e seja X um ponto desse prolongamento tal que BX é perpendicular a tal prolongamento. Daí temos que os triângulos BDX e ABP são semelhantes, ou seja:

$$\frac{x}{DX} = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{10}{DX}$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$(DX)^2 + (10)^2 = 13^2 \Rightarrow DX = \sqrt{69} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{10}{\sqrt{69}}$$

Agora vamos calcular a área do trapézio:

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(APB) + S(CPB) + S(CPD) + S(ADP) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PB + \frac{1}{2} \cdot CP \cdot PB + \frac{1}{2} \cdot CP \cdot PD + \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PD = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot (PB + PD) + \frac{1}{2} \cdot CP \cdot (PB + PD) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot (BD) + \frac{1}{2} \cdot CP \cdot (BD) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot (AP + CP) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot (AC) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (y + z) = \frac{13}{2} \cdot \left(y + \frac{(13-x) \cdot y}{x} \right) = \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{13 \cdot y}{x} \right) = \frac{169}{2} \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{69}} \right) = \\ &= \frac{845}{\sqrt{69}} = \frac{845\sqrt{69}}{69}. \end{aligned}$$

Questão 161 (Bélgica 2006)

- a) Encontre todos os números reais α , tais que $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$.
 b) Determine inteiros a, b, c, d tais que $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$, são soluções da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Solução

- a) $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow 4\alpha = 3\alpha + 2k\pi$ ou $4\alpha = (2\pi - 3\alpha) + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$ ou $\alpha = \frac{2\pi + 2k\pi}{7}$; logo as únicas soluções no intervalo $(0, 2\pi)$ são $\alpha = 0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ e $\frac{6\pi}{7}$. Assim, $1, \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$, são as raízes dessa equação

Por outro lado, temos que $\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ e $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Faça $\cos\alpha = t$.

Daí temos que:

$$\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow 8t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 3t + 1 = 0 = (t-1) \cdot (8t^3 + 4t^2 - 4t - 1)$$

daí a equação $(8t^3 + 4t^2 - 4t - 1)$ tem como soluções $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\pi\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$.

Questão 162 (Índia 1997)

Prove que não existem inteiros positivos m, n tais que $\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m} = 4$.

Solução

Lema 1: Seja p um número primo da forma $4k+3$. Se $p \mid m^2 + n^2$, então $p \mid m$ e $p \mid n$.

Prova:

Suponhamos, por absurdo, que p não divide m ; logo p não divide n , pois $p \mid (m^2 + n^2)$.

Por outro lado, como p não divide m , temos que $\text{mdc}(m, p) = 1$, então pelo teorema de Fermat temos que $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

$$\begin{aligned} \text{Como } p \mid (m^2 + n^2) &\Rightarrow n^2 \equiv -m^2 \pmod{p} \Rightarrow (n \cdot m^{p-2})^2 \equiv -(m^{p-1})^2 \pmod{p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (n \cdot m^{p-2})^2 \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow (n \cdot m^{p-2})^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(n \cdot m^{p-2})^{p-1} \equiv (-1)^{2k+1} \pmod{p} \Rightarrow (n \cdot m^{p-2})^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}, \text{ absurdo, pelo teorema de Fermat.}$$

Logo $p \mid m$. Analogamente, temos que $p \mid n$.

Lema 2: Seja t um número natural tal que $t = s \cdot (4r+3)$, onde s e r são números naturais; então t tem um fator primo da forma $4k+3$.

Prova:

É fácil ver que t tem um fator primo ímpar. Agora suponhamos, por absurdo, que $(4r+3)$ tenha só fatores primos da forma $4k+1$ daí $4r+3 \equiv 1 \pmod{4}$, absurdo!; logo temos que $4r+3$ tem um fator primo da forma $4k+3$.

Agora vamos ao nosso problema:

$$\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m} = 4 \Rightarrow m^2 + n^2 = n \cdot (4m-1). \text{ Pelo lema 2, temos que } m^2 + n^2 \text{ possui um fator primo } p \text{ da forma } 4k+3.$$

Daí pelo lema 1, temos que $p \mid m$ e $p \mid n$, absurdo pois $\text{mdc}(p, m) = 1$.

**Questão 163 (Índia 1992)**

Num triângulo ABC, $\angle BAC = 2 \angle ABC$. Prove que $a^2 = b \cdot (b + c)$.

Solução

Seja $\angle ABC = \alpha$. Daí temos que $\angle BAC = 2\alpha$ e $\angle ACB = 180^\circ - 3\alpha$. Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} \Rightarrow \frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha} \Rightarrow a = 2b \cdot \cos \alpha$$

$$\text{e } c = b(3 - 4 \sin^2 \alpha).$$

Daí temos que:

$$b(b + c) = b[b + b(3 - 4 \sin^2 \alpha)] = b[b(4 - 4 \sin^2 \alpha)] = b[4b(1 - \sin^2 \alpha)] = 4b^2 \cos^2 \alpha.$$

Por outro lado, temos que $a = 2b \cdot \cos \alpha \Rightarrow a^2 = 4b^2 \cos^2 \alpha$.

Portanto, temos que $a^2 = b(b + c)$.

Questão 164 (Índia 1993)

Prove que existe um número natural n tal que $n!$ tenha exatamente 1993 zeros.

Solução

A quantidade de zeros que tem em $n!$ é quantidade de fatores 5 que tem $n!$. Logo a quantidade de zeros é:

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^k} = \frac{\frac{n}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{n}{4}.$$

Temos que $1993 \leq \frac{n}{4} \Rightarrow 7972 \leq n$. Por inspeção, temos que 7975 e 7980 não são solução, mas 7985 é solução.

Questão 165 (Itália 1987)

Prove que para inteiro n , o número $3x^5 + 5x^3 - 8x$ é múltiplo de 120.

Solução

Note que $(n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n(n + 1) \cdot (n + 2) = n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 120.

Note que $(n - 3) \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n(n + 1) = n^5 - 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 6n$ é múltiplo de 120.

Note que $(n + 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n(n - 1) = n^5 + 5n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 6n$ é múltiplo de 120.

Logo temos que $(n^5 - 5n^3 + 4n) + (n^5 - 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 6n) + (n^5 + 5n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 6n) = 3n^5 + 5n^3 - 8n$ é múltiplo de 120.

Questão 166 (Vietnã 1982)

Ache a, b, c inteiros tais que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$.

Solução 1

Pela questão 42, já sabemos que $\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ e $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Daí temos que $\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = \cos 72^\circ - \cos 36^\circ = -\frac{1}{2}$ e além disso:

$$\cos 72^\circ \cos 144^\circ = -\cos 72^\circ \cos 36^\circ = -\frac{1}{4}.$$

Logo a equação $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ tem como raízes $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$, assim as raízes da equação $4x^2 + 2x - 1 = 0$ são $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$.

Solução 2: Sem calcular $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$.

Pela questão 78 letra c, temos que $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$

$$\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = \cos 72^\circ - \cos 36^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Note que $\cos 72^\circ \cos 144^\circ = -\cos 72^\circ \cos 36^\circ =$

$$= \frac{-\cos 72^\circ \cos 36^\circ \cdot \sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ}{\sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ} = \frac{-\sin 72^\circ \cdot \sin 144^\circ}{\sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{-\sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ}{\sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ} = -\frac{1}{4}.$$

Assim as raízes da equação $4x^2 + 2x - 1 = 0$ são $\cos 72^\circ$ e $\cos 144^\circ$.

Questão 167 (MOCP)

Prove que $\sec 40^\circ + \sec 80^\circ + \sec 160^\circ = 6$.

Solução

Note que 40° , 80° e 160° satisfazem a equação $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$

Usando a identidade $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$, temos que:

$$\cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8\cos^3 \alpha - 6\cos \alpha + 1 = 0, \text{ logo } \cos 40^\circ, \cos 80^\circ, \cos 160^\circ$$

são as raízes do polinômio $8\cos^3 \alpha - 6\cos \alpha + 1 = 0$.

Assim, temos que:

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ + \cos 160^\circ \cdot \cos 80^\circ + \cos 40^\circ \cdot \cos 160^\circ = -\frac{6}{8}$$

$$\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$$

$$\sec 40^\circ + \sec 80^\circ + \sec 160^\circ = \frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{1}{\cos 80^\circ} + \frac{1}{\cos 160^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 160^\circ \cos 40^\circ + \cos 160^\circ \cos 80^\circ}{\cos 160^\circ \cos 80^\circ \cos 40^\circ} = 6.$$

Questão 168 (Croácia 2001)

Se $a + b + c = 0$, calcule o valor da expressão $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}$.

Solução

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a , b , c . Daí temos que $a + b + c = -m = 0$, $ab + ac + bc = p$ e $abc = -q$. Assim, temos que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$$

Por outro lado, temos que:

$$a^3 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pa - q \quad (\text{i})$$

$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q \quad (\text{ii})$$

$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q \quad (\text{iii})$$

Somando (i) + (ii) + (iii), temos que $a^3 + b^3 + c^3 = -p \cdot (a + b + c) - 3q = -3q$.

Da mesma forma, temos que:

$$a^4 + pa^2 + q = 0 \Rightarrow a^4 = -pa^2 - qa \quad (\text{iv})$$

$$b^4 + pb^2 + q = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb \quad (\text{v})$$

$$c^4 + pc^2 + q = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc \quad (\text{vi})$$

Somando (iv) + (v) + (vi), temos que $a^4 + b^4 + c^4 = -p \cdot (a^2 + b^2 + c^2) - q \cdot (a + b + c) = 2p^2$.

Da mesma forma, temos que:

$$a^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow a^5 = -pa^3 - qa^2 \text{ (vii)}$$

$$b^5 + pb^3 + qb^2 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2 \text{ (viii)}$$

$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2 \text{ (ix)}$$

Somando (vii) + (viii) + (ix), temos que $a^5 + b^5 + c^5 = -p \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - q \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$.

Da mesma forma, temos que:

$$a^7 + pa^5 + qa^4 = 0 \Rightarrow a^7 = -pa^5 - qa^4 \text{ (x)}$$

$$b^7 + pb^5 + qb^4 = 0 \Rightarrow b^7 = -pb^5 - qb^4 \text{ (xi)}$$

$$c^7 + pc^5 + qc^4 = 0 \Rightarrow c^7 = -pc^5 - qc^4 \text{ (xii)}$$

Somando (x) + (xi) + (xii), temos que:

$$a^7 + b^7 + c^7 = -p \cdot (a^5 + b^5 + c^5) - q \cdot (a^4 + b^4 + c^4) = -7p^2q$$

Com isso, temos que
$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{abc(a^4 + b^4 + c^4)} = \frac{-7p^2q}{q(2p^2)} = \frac{7}{2}.$$

Questão 169 (Brasil 2003)

Sejam a, b, c números reais não-nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os

possíveis valores de
$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}.$$

Solução

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c . Daí temos que $a + b + c = -m = 0$, $ab + ac + bc = p$ e $abc = -q$. Assim temos que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$$

Por outro lado temos que:

$$a^3 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pa - q \text{ (i)}$$

$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q \text{ (ii)}$$

$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q \text{ (iii)}$$

Somando (i) + (ii) + (iii), temos que $a^3 + b^3 + c^3 = -p \cdot (a + b + c) - 3q = -3q$.

Da mesma forma, temos que:

$$a^4 + pa^2 + q = 0 \Rightarrow a^4 = -pa^2 - qa \text{ (iv)}$$

$$b^4 + pb^2 + q = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb \text{ (v)}$$

$$c^4 + pc^2 + q = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc \text{ (vi)}$$



Somando (iv) + (v) + (vi), temos que $a^4 + b^4 + c^4 = -p \cdot (a^2 + b^2 + c^2) - q \cdot (a + b + c) = 2p^2$

Da mesma forma, temos que:

$$a^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow a^5 = -pa^3 - qa^2 \text{ (vii)}$$

$$b^5 + pb^3 + qb^2 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2 \text{ (viii)}$$

$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2 \text{ (ix)}$$

Somando (vii) + (viii) + (ix), temos que:

$$a^5 + b^5 + c^5 = -p \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - q \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 5pq.$$

$$\text{Daí temos que } \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2} = \frac{(9q^2 \cdot 2p^2)}{(5pq^2)} = \frac{18}{25}.$$

Questão 170 (Áustria 1991)

Sejam a, b números racionais. Prove que se $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ é racional, então $\sqrt[3]{a}$ e $\sqrt[3]{b}$ são racionais.

Solução

Como $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3\sqrt[3]{ab} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} \in \mathbb{Q}.$

Como $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + 2\sqrt[3]{ab} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + 2\sqrt[3]{ab}) - (\sqrt[3]{ab}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}) \in \mathbb{Q}.$

Daí temos que $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 2\sqrt[3]{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \in \mathbb{Q}.$ Analogamente, provamos que $\sqrt[3]{b}$ é racional.

Questão 171 (África do Sul 1998)

$\log_8 10$ é racional ?

Solução

Suponhamos, por absurdo, que $\log_8 10$ fosse racional. Então teríamos que:

$\log_8 10 = \frac{a}{b}$ (onde a, b são naturais) $\Rightarrow 8^a = 10^b$, absurdo!, logo $\log_8 10$ é irracional.

Questão 172 (Estados Unidos 1973)

Encontre todas as soluções (reais ou complexas) do sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$$

Solução

Seja $h(x) = x^3 + mx^2 + px + q = 0$, um polinômio de terceiro tal que suas raízes são a, b, c . Daí temos que $a + b + c = -m$, $ab + ac + bc = p$ e $abc = -q$.

Adicionalmente, vem: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9 = 3 + 2 \cdot (ab + ac + bc) \Rightarrow ab + ac + bc = 3 \Rightarrow p = 3.$$

Por outro lado, temos que:

$$a^3 + ma^2 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -ma^2 - pa - q \quad (i)$$

$$b^3 + mb^2 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -mb^2 - pb - q \quad (ii)$$

$$c^3 + mc^2 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -mc^2 - pc - q \quad (iii)$$

Somando (i) + (ii) + (iii), temos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = -m(a^2 + b^2 + c^2) - p(a + b + c) - 3q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = -9 + 9 - 3q \Rightarrow q = -1.$$

Assim, concluímos que $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$, portanto, a única solução do sistema é $a = b = c = 1$.



Capítulo 4

Soluções do Capítulo 2

Questão 1

Prove que, para todo n natural, existem n números inteiros consecutivos tais que nenhum é primo.

Solução

Tome os números $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + n, (n+1)! + n+1$. Note que nenhum destes números é primo, pois $(n+1)! + 2$ é divisível por 2, $(n+1)! + 3$ é divisível por 3, ..., $(n+1)! + n$ é divisível por n e $(n+1)! + n+1$ é divisível por $n+1$.

Questão 2

Prove que toda função pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar.

Solução

Seja $h(x)$ uma função, devemos mostrar que $h(x) = f(x) + g(x)$, onde $f(x)$ é uma função par e $g(x)$ é uma função ímpar.

Temos $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$.

Assim, temos que $f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}$ e $g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}$.

Questão 3

Prove que há infinitos números primos.

Solução

Suponhamos, por absurdo, que a quantidade de números primos fosse finita, isto é, que os únicos primos existentes fossem $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$.

Nesse caso, o número genérico $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$ não seria divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$, logo A seria um novo número primo, o que seria absurdo, pois contradiz a hipótese inicial. Portanto, existem infinitos números primos.

Questão 4

Prove que a equação $3^x + 4^x = 5^x$ não tem solução se $x > 2$.

Solução

Claramente, $x = 2$ é solução da equação.

Seja $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. É fácil que $f(x)$ é decrescente para todo $x \geq 2$.

Como $f(2) = 1$, temos que se $x > 2$ então $f(x) < 1$, logo $3^x + 4^x < 5^x$.

Questão 5

- Prove que $\cos 10^\circ$ é irracional.
- Prove que $\cos 2^\circ$ é irracional.
- Prove que $\cos 1^\circ$ é irracional.
- Prove que $\cos 2\alpha$ é irracional, então $\sin \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ são irracionais.
- Prove que $\sin 1^\circ$ e $\operatorname{tg} 1^\circ$ são irracionais.

APPROVA

Solução

a) Suponhamos, por absurdo, que $\cos 10^\circ$ fosse racional. Daí teríamos que $\cos 30^\circ = 4 \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ$ também seria racional (pois $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$), absurdo, pois $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Suponhamos, por absurdo, que $\cos 2^\circ$ fosse racional, daí teríamos que $16 \cos^5(2^\circ) - 20 \cos^3(2^\circ) + 5 \cos(2^\circ) = \cos 10^\circ$ também seria racional (pois $\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$), absurdo, logo $\cos 2^\circ$ é irracional.

c) Suponhamos, por absurdo, que $\cos 1^\circ$ fosse racional, daí teríamos que $\cos 2^\circ = 2 \cos^2 1^\circ - 1$ (pois $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$) seria racional, absurdo, pois $\cos 1^\circ$ é irracional.

d) Suponhamos, por absurdo, que $\cos 2\alpha$ é irracional e $\sin \alpha$ é racional.

Como $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ e $\sin \alpha$ é racional, temos que $\cos 2\alpha$ é racional, absurdo, portanto $\sin \alpha$ é irracional.

Parte 2: Provar que $\operatorname{tg} \alpha$ é irracional.

Prova:

Suponhamos, por absurdo, que $\cos 2\alpha$ é irracional e $\operatorname{tg} \alpha$ é racional.

Como $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, temos que $\cos 2\alpha$ é racional, absurdo, portanto $\operatorname{tg} \alpha$ é irracional.

e) Pela letra d, como $\cos 2^\circ$ é irracional, temos que $\operatorname{tg} 1^\circ$ e $\sin 1^\circ$ são irracionais.

Questão 6

Prove que $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$.

Solução

$$\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ} = \frac{\frac{\sin 72^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 144^\circ}{2}}{\sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Questão 7

Prove que para todo inteiro $n > 1$ vale que: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

Solução

Vamos provar isso por indução:

- i) Para $n = 1$, isso é verdade;
- ii) Suponhamos que a propriedade é válida para $n = k$, isto é,

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2} \quad (\text{H.I.})$$

- iii) Vamos provar que a propriedade vale para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} &= \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} & \end{aligned}$$

pela hipótese de indução, basta provar que

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > 0.$$

Note que $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = 0$; logo a propriedade é verdadeira

Questão 8

Prove que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, onde $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é bijetora.

Solução

Faça $x = \tan \alpha$, onde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{|\sec \alpha|} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot |\cos \alpha| = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha.$$

Obs:

- i) Note -1 e 1 não pertencem à imagem, pois $\alpha \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- ii) Note que $|\cos \alpha| = \cos \alpha$, pois $\alpha \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 9

- a) Prove que $\cos 20^\circ$ é irracional.
 b) Prove que $\cos 4^\circ$ é irracional.
 c) Prove que $\cos^2 2^\circ$ é irracional.
 d) Prove que $\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ$ é irracional.

Solução

a) Como $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, temos que $\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$.

Fazendo $\cos 20^\circ = t$, temos que $4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \Rightarrow 8t^3 - 6t - 1 = 0$. Agora faça

$u = 2t$, daí temos que $g(u) = u^3 - 3u - 1 = 0$, logo pelo teste da raiz racional temos que os candidatos a raízes racionais da equação são 1 e -1 . E com $g(1) = -3$ e $g(-1) = 1$, então g não possui raízes racionais e portanto $2u$ é irracional, logo $\cos 20^\circ$ é irracional.

b) Suponhamos, por absurdo, que $\cos 4^\circ$ fosse racional, daí teríamos que $16 \cos^5(4^\circ) - 20 \cos^3(4^\circ) + 5 \cos(4^\circ) = \cos 20^\circ$ (pois $\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$) seria racional, absurdo!, logo $\cos 4^\circ$ é irracional.

c) Suponhamos, por absurdo, que $\cos^2 2^\circ$ fosse racional, daí teríamos que $\cos 4^\circ = 2 \cos^2 2^\circ - 1$ (pois $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$) seria racional, absurdo, pois $\cos 4^\circ$ é irracional, absurdo!, logo $\cos^2 2^\circ$ é irracional.

d) Suponhamos, por absurdo, que $\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ$ fosse racional, daí teríamos que $\sin 2^\circ = 2 \cos 1^\circ \cdot \sin 1^\circ$ (pois $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$) seria racional, logo $\sin^2 2^\circ$ seria racional, portanto $\cos^2 2^\circ = 1 - \sin^2 2^\circ$ seria racional, absurdo, pois $\cos^2 2^\circ$ é irracional, logo $\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ$ é irracional.

Questão 10

Resolva a equação no conjunto dos números reais: $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

Solução

É claro que $x \geq -2$. Agora vamos analisar 2 casos:

Caso 1: $-2 \leq x \leq 2$

Daí podemos fazer $x = 2 \cos \alpha$, onde $\alpha \in (0, \pi)$. Daí substituindo a equação original temos que:

$$8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha = \sqrt{2 \cos \alpha + 2} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2 \cos 3\alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos 3\alpha = \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 3\alpha + \frac{\alpha}{2} = 2k\pi \text{ ou } 3\alpha - \frac{\alpha}{2} = 2k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Como $\alpha \in (0, \pi)$, temos que $x = 2 \cos 0^\circ$ ou $2 \cos \frac{4\pi}{5}$ ou $2 \cos \frac{4\pi}{7}$.

Caso 2: $x > 2$

Neste caso temos que $x^3 - 3x > x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4) > 0$.

Por outro lado temos que $x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1) > 0 \Rightarrow x > \sqrt{x+2} \Rightarrow x^3 - 3x > x > \sqrt{x+2}$, logo não há solução nesse caso.

Questão 11

Prove que toda matriz pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

Solução

Seja A uma matriz, devemos mostrar que $A = B + C$, onde A é uma matriz simétrica e $g(x)$ é uma matriz anti-simétrica. Daí temos que $A^T = B^T + C^T = B - C$.

Daí temos que $B = \frac{A + A^T}{2}$ e $C = \frac{A - A^T}{2}$.

Questão 12

Calcule a soma $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Questão 13

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ termos de uma P.A., prove que:

a) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, onde r é a razão da P.A.

$$b) \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

$$c) \frac{1}{a_2 \cdot a_1} + \frac{1}{a_3 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} = \frac{n-1}{a_n \cdot a_1}$$

Solução

$$a) a_2 - a_1 = r$$

$$a_3 - a_2 = r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

.....

$$a_{n-1} - a_{n-2} = r$$

$$a_n - a_{n-1} = r$$

Somando membro a membro temos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

$$b) \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} = \frac{1}{r} [\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} = \frac{1}{r} [\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} = \frac{1}{r} [\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}]$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}}} = \frac{1}{r} [\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-2}}]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{1}{r} [\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}]$$

Somando membro a membro, temos que:

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{1}{r} [\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}] = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

$$c) \frac{1}{a_2 \cdot a_1} + \frac{1}{a_3 \cdot a_2} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{(n-1)}} - \frac{1}{a_{(n-2)}} \right) + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{(n-1)}} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} \right) \right] = \frac{n-1}{a_n \cdot a_1}$$

Questão 14

Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Solução 1

Seja $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Pelo teorema acima as raízes racionais da equação só podem ser 1 ou -1, que claramente não são soluções (em ambos os casos, o valor numérico do polinômio é -8).

Logo esse polinômio só possui raízes irracionais, portanto $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Solução 2

Pelo lema da questão 59 do capítulo 1 temos que:

Sejam a, b números racionais, então $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são racionais. Como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais, temos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Questão 15

Calcule a soma $S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}}$.

Solução

Pela questão 13 letra c, temos que

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}} = \frac{399 - 1}{\sqrt{1} + \sqrt{400}} = 19.$$

Questão 16

Prove que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Solução

Seja $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \Rightarrow x^3 = 40 + 6x \Rightarrow x^3 - 6x - 40 = 0$.

É fácil ver que 4 é raiz desse polinômio e $x^3 - 6x - 40 = (x - 4)(x^2 + 4x + 10)$. Note que as raízes de $x^2 + 4x + 10$ são complexas e $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ é real; logo $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Questão 17

Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

Solução

Vamos denotar cara por 1 e coroa por 2 e a soma dos números por S . Daí inicialmente temos $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, portanto $S = 7$. Daí temos 5 casos a analisar:

Caso 1: As 4 moedas viradas eram cara.

Daí após o movimento teremos 4 coroas “novas” logo a nova soma será $S + 4$, logo a soma permanecerá ímpar.

Caso 2: As 4 moedas viradas eram 3 caras e 1 coroa.

Daí após o movimento teremos 3 coroas “novas” e 1 cara “nova”, logo a nova soma será $S + 2$, logo a soma permanecerá ímpar.

Caso 3: As 4 moedas viradas eram 2 caras e 2 coroas.

Após o movimento, teremos 2 coroas “novas” e 2 caras “novas”; logo a nova soma permanecerá sendo, logo a soma permanecerá ímpar.

Caso 4: As 4 moedas viradas eram 1 cara e 3 coroas.

Daí após o movimento teremos 1 coroa “nova” e 3 caras “novas” logo a nova soma será $S - 2$, logo a soma permanecerá ímpar.

Caso 5: As 4 moedas viradas eram coroa.

Daí após o movimento teremos 4 caras “novas” logo a nova soma será $S - 4$, logo a soma permanecerá ímpar.

Em qualquer caso a soma permanecerá sempre ímpar, logo nunca podemos chegar a $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ pois neste caso $S = 14$, que é par.

Questão 18

Coloque os números em ordem crescente: 2^{14995} , 3^{8997} , 5^{5998} .

Solução

Note que $5^2 < 3^3 < 2^5$, logo $(5^2)^{2999} < (3^3)^{2999} < (2^5)^{2999}$, portanto $5^{5998} < 3^{8997} < 2^{14995}$.

Questão 19 (Concurso para professor do Cefet – Piauí – Adaptada)

Os movimentos de uma partícula estando nos pontos (x, y) do plano, com $x, y \in \mathbb{N}$ são: $S(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$ e $D(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$. É possível sair do ponto $P(0, 0)$ para o ponto $Q(35, 16)$, usando esses movimentos?

Solução

Seja T = somas das coordenadas do ponto. Note que a soma inicial é zero. Se realizarmos um movimento do tipo S , a soma aumenta em 2, mas permanece sendo um número par. E se realizarmos um movimento do tipo D , a soma não se altera. A T sempre é par, portanto não podemos chegar ao ponto $(35, 16)$, pois neste caso teríamos $T = 51$ que é ímpar.

Questão 20

Prove que $C_{1000,500}$ não é divisível por 7.

Solução

A idéia é contar o número de fatores 7 dos fatoriais.

Note que $1000!$ tem $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^3} \right\rfloor = 142 + 20 + 2 = 164$ fatores 7.

Analogamente temos que $500!$ tem $\left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{7^3} \right\rfloor = 71 + 10 + 1 = 82$ fatores 7, portanto no numerador há 164 fatores 7 e no denominador também há 164 fatores 7, assim $C_{1000,500}$ não é divisível por 7.

Questão 21 (Concurso para professor do Cefet – Piauí – Adaptada)

Seja z um número complexo unitário. Se $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$. Calcule $z^n + \frac{1}{z^n}$.

Solução

Como z é unitário temos que $z = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha \Rightarrow z^n = \cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha$.

Adicionalmente, $\frac{1}{z} = z^{-1} = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha) \Rightarrow z^{-n} = \cos(-n\alpha) + i \cdot \sin(-n\alpha) =$

$= \cos(n\alpha) - i \cdot \sin(n\alpha)$, logo $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\alpha)$.

Questão 22

Prove que para todo n natural a equação $a^n + b^n = c^{n+1}$ tem infinitas soluções naturais a, b, c .

Solução

Tome $a = b = 2t^{n+1}$ e $c = 2t^n$, para todo t natural isso é uma solução da equação acima, logo ela possui infinitas soluções.

Questão 23)

Encontre todos os números naturais a, b, c tais que $2^a + 2^b = 2^c$.

Solução

Vamos analisar 3 casos.

Caso 1: $a = b = n$

Neste caso temos que $c = n + 1$.

Caso 2: $a > b$

Neste caso temos que $2^a < 2^a + 2^b < 2^{a+1}$, logo não há solução.

Caso 3: $a < b$

Neste caso temos que $2^b < 2^a + 2^b < 2^{b+1}$, logo não há solução.

Questão 24

Ache uma equação do quarto grau cujas raízes são $\cos \frac{2\pi}{9}$, $\cos \frac{4\pi}{9}$, $\cos \frac{6\pi}{9}$ e $\cos \frac{8\pi}{9}$.

Solução

Seja a equação $\cos(5\alpha) = \cos(4\alpha)$. Resolvendo-a, temos:

$$5\alpha = 4\alpha + 2k\pi \text{ ou } 5\alpha = (2\pi - 4\alpha) + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{2\pi + 2k\pi}{9}$$

As únicas soluções no intervalo $[0, 2\pi]$ são $\alpha = 0, \pi, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}$ e $\frac{8\pi}{9}$.

Logo $\pi, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}$ e $\frac{8\pi}{9}$ são as raízes dessa equação $\cos(5\alpha) = \cos(4\alpha)$.

Por outro lado, temos que $\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ e $\cos(5\alpha) = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$.

Façamos $\cos\alpha = t$. Temos então:

$\cos(4\alpha) = \cos(5\alpha) \Leftrightarrow 16t^5 - 8t^4 - 20t^3 + 8t^2 + 5t - 1 = 0 = (t - 1)(16t^4 + 8t^3 - 12t^2 - 4t + 1)$; daí a equação $16t^4 + 8t^3 - 12t^2 - 4t + 1$ tem como soluções

$$\cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{6\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9}.$$

Questão 25

Sejam a, b, c números reais, tais que $a + b + c = 0$. Prove que:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$

Solução

Seja $x^3 + mx^2 + px + q = 0$ um polinômio de terceiro, tal que suas raízes são a, b, c . Temos que $a + b + c = -m = 0$, $ab + ac + bc = p$ e $abc = -q$. Assim, temos que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2p$$

Por outro lado, temos:

$$a^3 + pa + q = 0 \Rightarrow a^3 = -pa - q \quad (\text{i})$$

$$b^3 + pb + q = 0 \Rightarrow b^3 = -pb - q \quad (\text{ii})$$

$$c^3 + pc + q = 0 \Rightarrow c^3 = -pc - q \quad (\text{iii})$$

Somando (i) + (ii) + (iii), teremos $a^3 + b^3 + c^3 = -p(a + b + c) - 3q = -3q$.

Da mesma forma, teremos:

$$a^4 + pa^2 + q = 0 \Rightarrow a^4 = -pa^2 - qa \quad (\text{iv})$$

$$b^4 + pb^2 + q = 0 \Rightarrow b^4 = -pb^2 - qb \quad (\text{v})$$

$$c^4 + pc^2 + q = 0 \Rightarrow c^4 = -pc^2 - qc \quad (\text{vi})$$

Somando (iv) + (v) + (vi), temos que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = -p(a^2 + b^2 + c^2) - q(a + b + c) = 2p^2$$

Da mesma forma, temos que:

$$a^5 + pa^3 + qa^2 = 0 \Rightarrow a^5 = -pa^3 - qa^2 \quad (\text{vii})$$

$$b^5 + pb^3 + qb^2 = 0 \Rightarrow b^5 = -pb^3 - qb^2 \quad (\text{viii})$$

$$c^5 + pc^3 + qc^2 = 0 \Rightarrow c^5 = -pc^3 - qc^2 \quad (\text{ix})$$

Somando (vii) + (viii) + (ix), temos que:

$$a^5 + b^5 + c^5 = -p(a^3 + b^3 + c^3) - q(a^2 + b^2 + c^2) = 5pq$$

Da mesma forma, temos que:

$$a^7 + pa^5 + qa^4 = 0 \Rightarrow a^7 = -pa^5 - qa^4 \quad (\text{x})$$

$$b^7 + pb^5 + qb^4 = 0 \Rightarrow b^7 = -pb^5 - qb^4 \quad (\text{xi})$$

$$c^7 + pc^5 + qc^4 = 0 \Rightarrow c^7 = -pc^5 - qc^4 \quad (\text{xii})$$

Somando (x) + (xi) + (xii), temos que:

$$a^7 + b^7 + c^7 = -p(a^5 + b^5 + c^5) - q(a^4 + b^4 + c^4) = -7p^2q.$$

Com isso, saem trivialmente os resultados das letras a e b.

Questão 26

Prove que: $\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ = 0$.

Solução

Pela questão 54 letra e já sabemos que $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, daí temos que

$\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ = 1$, ..., $\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ = 1$. Daí

temos que $\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ = (\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 89^\circ) +$
 $+ (\log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 88^\circ) + (\log \operatorname{tg} 3^\circ + \log \operatorname{tg} 87^\circ) + \dots + (\log \operatorname{tg} 44^\circ + \log \operatorname{tg} 46^\circ) +$
 $+ \log \operatorname{tg} 45^\circ = \log (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) + \log (\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ) + \log (\operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ) + \dots +$
 $+ \log (\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ) + \log \operatorname{tg} 45^\circ = 0$.

Questão 27

Encontre o valor da soma

$$S = \frac{1}{\log_2 2010!} + \frac{1}{\log_3 2010!} + \dots + \frac{1}{\log_{2009} 2010!} + \frac{1}{\log_{2010} 2010!}.$$

Solução

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_2 2010!} + \frac{1}{\log_3 2010!} + \dots + \frac{1}{\log_{2009} 2010!} + \frac{1}{\log_{2010} 2010!} = \\ & = \log_{2010!} 2 + \log_{2010!} 3 + \log_{2010!} 4 + \dots + \log_{2010!} 2009 + \log_{2010!} 2010 = \\ & = \log_{2010!} 2010! = 1 \end{aligned}$$

Questão 28

Prove que o produto de 4 números inteiros positivos consecutivos mais um é sempre quadrado perfeito.

Solução

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = (n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2) + 1.$$

Faça $t = n^2 + 3n$, logo

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = t \cdot (t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2.$$

Questão 29

Seja s um número natural, prove que no intervalo $[s, 2s]$ existe uma potência de 2.

Solução

Se s é uma potência de 2 é trivial. Se s não é uma potência de 2, então existe um número natural r tal que $2^r < s < 2^{r+1} \Rightarrow 2^{r+1} < 2s < 2^{r+2}$, assim temos que $s < 2^{r+1} < 2s$.

Questão 30

Encontre todos os números naturais não-nulos a, b tais que $a + b = ab$.

Solução

Vamos analisar 3 casos:

Caso 1: $a = b$

Neste caso temos que $2a = a^2 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 2$.

Caso 2: $a > b$

Daí temos que $a + b < 2b \Rightarrow ab < 2b \Rightarrow a < 2$, logo $a = 1$ portanto temos que $b + 1 = b$, absurdo!

Caso 3: $a < b$

Daí temos que $a + b < 2a \Rightarrow ab < 2a \Rightarrow b < 2$, logo $b = 1$ portanto temos que $a + 1 = a$, absurdo!

Conclusão: A única solução é $(2, 2)$.

Questão 31

Encontre todos os números naturais a, b, c tais que $a + b + c = abc$.

Solução

Vamos analisar 3 casos:

Caso 1: $a = \max\{a, b, c\}$, isto é, $a \geq b$ e $a \geq c$.

Neste caso temos que $a + b + c \leq 3a$. Logo $bc \leq 3$ e então conclui-se que $(3, 2, 1)$ e $(3, 1, 2)$ são as únicas soluções.

Caso 2: $b = \max\{a, b, c\}$, isto é, $b \geq a$ e $b \geq c$.

Neste caso temos que $a + b + c \leq 3b$. Logo $ac \leq 3$ e então conclui-se que $(1, 3, 2)$ e $(2, 3, 1)$ são as únicas soluções.

Caso 3: $c = \max\{a, b, c\}$, isto é, $c \geq a$ e $c \geq b$.

Neste caso temos que $a + b + c \leq 3c$. Logo $ab \leq 3$ e então conclui-se que $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 3)$ são as únicas soluções.

Questão 32

Sejam ABC um triângulo. Prove que se $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, então o triângulo é necessariamente retângulo.

Solução

Antes de fazer esse problema, vamos provar dois lemas.

Lema 1: Sejam A, B, C ângulos de um triângulo, prove que $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$.

Prova:

$$\begin{aligned} \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= [2 \cos(A+B) \cdot \cos(A-B)] + \cos 2C = \\ &= -2 \cos C \cdot \cos(A-B) + (2 \cos^2 C) - 1 = -2 \cos C [\cos(A-B) - \cos C] - 1 = \\ &= -2 \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 1 = -2 \cos C (2 \cos A \cos B) - 1 = \\ &= -1 - 4 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

Lema 2: Sejam A, B, C ângulos de um triângulo, prove que $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.

Prova:

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C &= \\ &= \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \frac{1+\cos 2C}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-1 - 4 \cos A \cos B \cos C}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C = 1. \end{aligned}$$

Agora vamos ao problema:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 &\Rightarrow 3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 - (1 - 2 \cos A \cos B \cos C) = 2 \Rightarrow 2 - 2 \cos A \cos B \cos C = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cos A \cos B \cos C = 0 \Rightarrow \cos A = 0 \text{ ou } \cos B = 0 \text{ ou } \cos C = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = 90^\circ \text{ ou } B = 90^\circ \text{ ou } C = 90^\circ. \text{ Portanto, o triângulo é retângulo.} \end{aligned}$$

Questão 33

Prove que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

(Identidade de Catalan)

Solução

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\
& = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n} \right) = \\
& = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = \\
& = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = \\
& = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Questão 34

Prove que $641 \mid 2^{32} + 1$.

Solução

$$\begin{aligned}
641 &= 5 \cdot 2^7 + 1, \text{ logo temos que } 5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641} \Rightarrow (5 \cdot 2^7)^4 \equiv (-1)^4 \pmod{641} \\
&\Rightarrow 5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por outro lado, temos que } 641 &= 5^4 + 2^4 \Rightarrow 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 5^4 \cdot 2^{28} \equiv -2^4 \cdot 2^{28} \pmod{641}.
\end{aligned}$$

Já que $5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ e $5^4 \cdot 2^{28} \equiv -2^{32} \pmod{641}$, então $-2^{32} \equiv 1 \pmod{641}$, tendo em vista a seguinte propriedade da congruência:

$$\text{se } a \equiv b \pmod{m} \text{ e } a \equiv c \pmod{m} \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}.$$

Portanto, como $-2^{32} \equiv 1 \pmod{641}$, temos que $641 \mid 2^{32} + 1$.

Questão 35

Resolva a equação $\sqrt[3]{14-x} + \sqrt[3]{14+x} = 4$.

Solução

$$\begin{aligned}
&\text{Faça } u = \sqrt[3]{14-x} \text{ e } v = \sqrt[3]{14+x}, \text{ daí temos que } u + v = 4 \Rightarrow (u + v)^3 = 64 \Rightarrow \\
&\Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 64 \Rightarrow 28 + 3uv(4) = 64 \Rightarrow uv = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{169-x^2} = 3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 196 - x^2 = 27 \Rightarrow x = \pm 13.
\end{aligned}$$

Questão 36

Encontre todos os inteiros x, y tais que $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.

Solução

Seja (a, b) uma solução então temos que $a \cdot (a + 8) \cdot (a + 1) \cdot (a + 7) = b^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a^2 + 8a) \cdot (a^2 + 8a + 7) = b^2$.

Dai, fazendo a mudança de variável $t = a^2 + 8a$, vem: $t \cdot (t + 7) = b^2$.

Se $t > 9 \Rightarrow t^2 + 6t + t > t^2 + 6t + 9 \Rightarrow t^2 + 7t > (t + 3)^2 \Rightarrow t \cdot (t + 7) > (t + 3)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b^2 > (t + 3)^2$

Por outro lado sabemos que se $t > 9$, então $t^2 + 7t < t^2 + 8t + 16 = (t + 4)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (t + 4)^2 > b^2 > (t + 3)^2$, absurdo, logo temos que $t \leq 9 \Rightarrow -9 \leq a \leq 1$.

Dai por inspeção, temos que as soluções são $(-9, \pm 12)$, $(-8, 0)$, $(-7, 0)$, $(-4, \pm 12)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, \pm 12)$.

Questão 37

Prove que para todo $n \geq 2$, vale que: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Solução

Note que $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n} < 1$.

Questão 38

Suponha que $a_1 = 3$ e $a_{k+1} = 4a_k + 3$, para todo $k \geq 1$. Encontre uma fórmula geral para $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Solução

$a_{k+1} = 4a_k + 3 \Rightarrow a_{k+1} + 1 = 4(a_k + 1)$. Dai defina $b_k = a_k + 1$ é uma P.G de
 razão 4, logo $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = 4 \left[\frac{-1 + (4)^n}{4 - 1} \right] = \frac{4}{3}(4^n - 1)$, portanto $a_1 +$

$$+ a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{4}{3}(4^n - 1) - \frac{n}{2}.$$

Questão 39

Prove que $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$, para todo x real.

Solução



$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{1 + x^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)} = 2.$$

Questão 40

Prove que para quaisquer a, b, c reais positivos vale que:

$$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c) \geq 8abc.$$

Solução

Usando M.A. $\geq$ M.G., vem:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (I)$$

$$c + b \geq 2\sqrt{cb} \quad (II)$$

$$a + c \geq 2\sqrt{ac} \quad (III)$$

Multiplicando tudo temos que $(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c) \geq 8abc$.

Questão 41

Prove que os 1979 primeiros algarismos após a virgula do número $(6 + \sqrt{35})^{1980}$ são todos algarismos 9.

Solução

$$\text{Lema 1: } 6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$$

Prova:

$$\text{Suponhamos, por absurdo, que } 6 - \sqrt{35} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow 60 - 10\sqrt{35} \geq 1 \Rightarrow 59 \geq 10\sqrt{35}$$

$$\Rightarrow 3481 \geq 3500, \text{ absurdo!}, \text{ logo } 6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}.$$

Agora vamos ao nosso problema.

Note que $(6 + \sqrt{35})^{1980} + (6 - \sqrt{35})^{1980}$ é um número inteiro e par, pois na expansão binomial os termos de ordem ímpar (primeiro, terceiro, quinto, ...) são iguais e os termos de ordem par (segundo, quarto, sexto, ...) se cancelam. Assim temos que $(6 + \sqrt{35})^{1980} + (6 - \sqrt{35})^{1980} = 2k$.

$$\text{Como } 6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10} \Rightarrow (6 - \sqrt{35})^{1980} < \left(\frac{1}{10}\right)^{1980} \Rightarrow 2k - 1 + 0,99 \dots 9 \text{ (1979}$$

$$\text{números 9)} = 2k - \left(\frac{1}{10}\right)^{1980} < (6 + \sqrt{35})^{1980} < 2k.$$

Questão 42

Calcule $\cos 72^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\sin 54^\circ$ e $\cos 54^\circ$.

Parte 1

Solução 1: Calcular $\cos 72^\circ$.

Note que $\cos(2 \cdot 72^\circ) = \cos(3 \cdot 72^\circ)$, logo $\cos 72^\circ$ é uma solução da equação $\cos 2x = \cos 3x$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \\ &= \cos x [2(\cos^2 x) - 1] - \sin x (2 \sin x \cos x) = \\ &= 2(\cos^3 x) - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.\end{aligned}$$

Daí temos que:

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2 \cos^2 x + 1 = 0.$$

Faça $t = \cos x$. Daí temos que

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1) \cdot (4t^2 + 2t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Como $\cos 72^\circ > 0$ e $\cos 72^\circ \neq 1$ temos que $\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Solução 2

$$\cos 72^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1 = 2 \cos^2 144^\circ - 1 = 2 \cdot (2 \cos^2 144^\circ - 1)^2 - 1 = 8 \cos^4 72^\circ - 8 \cos^2 72^\circ + 1.$$

$$\begin{aligned}\text{Faça } y = \cos 72^\circ \Rightarrow 8y^4 - 8y^2 - y + 1 &= 0 \Rightarrow (y - 1) \cdot (2y + 1) \cdot (4y^2 + 2y - 1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{-1}{2} \text{ ou } y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ ou } y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

Como $\cos 72^\circ > 0$, temos que $\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Parte 2: Calcular $\sin 18^\circ$.

Solução 1:

$$\text{Pela parte 1 temos que: } \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Parte 3: Calcular $\sin 72^\circ$.

Solução:

$$\text{Como } \sin^2 72^\circ + \cos^2 72^\circ = 1 \Rightarrow \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Parte 4: Calcular $\cos 18^\circ$.

Solução 1:

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \Rightarrow \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Solução 2:

Como $\cos(5x) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$ e como $\cos(90^\circ) = 0$, temos que $16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x = 0$. Faça $t = \cos 36^\circ$.

Daí temos que $16t^5 - 20t^3 + 5t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$. Como

$$\cos 18^\circ > \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Parte 5: Calcular $\sin 36^\circ$.

Solução 1:

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Solução 2:

$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$. Fazendo $\sin 36^\circ = t$, temos que $5t - 20t^3 + 16t^5 = 0 \Rightarrow t(5 - 20t^2 + 16t^4) = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow t = 0$ ou $5 - 20t^2 + 16t^4 = 0$.

Fazendo $y = t^2$, temos que:

$$5 - 20t^2 + 16t^4 = 0 \Rightarrow 5 - 20y + 16y^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \text{ ou } y = -\frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow t=0$$

$$\text{ou } t = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } t = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } t = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } t = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

$$\text{Como } \sin 36^\circ > 0, \text{ temos que } \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

$$\text{Note que } \frac{5+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}, \text{ logo } \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Parte 6: Calcular $\cos 36^\circ$.

Solução:

$$\text{Como } \sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ = 1 \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Parte 7: Calcular $\sin 54^\circ$.

Solução:

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Parte 8: Calcular $\cos 54^\circ$.

Solução:

$$\cos 54^\circ = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Questão 43

Determine imagem da função: $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$.

Solução

$$a \sin x + b \cos x = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right) \cdot \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right].$$

$$\text{Note que } -1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1, \quad \text{e } \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]^2 + \left[\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]^2 = 1,$$

logo podemos fazer $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$. Daí temos que

$$f(x) = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right) \sin(x + \alpha). \text{ Assim é fácil ver que a imagem da função é } \left[-\sqrt{a^2 + b^2}, +\sqrt{a^2 + b^2} \right].$$

Questão 44 (Fórmula da soma dos senos de arcos em P.A.)

Prove que:

$$\sin x + \sin(x+r) + \sin(x+2r) + \dots + \sin(x+kr) = \frac{\cos\left(x - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + kr + \frac{r}{2}\right)}{2 \sin \frac{r}{2}}$$

Solução

$$\cos\left(x - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{r}{2}\right) = -2 \sin x \cdot \sin\left(-\frac{r}{2}\right) = 2 \sin x \cdot \sin\left(\frac{r}{2}\right).$$

$$\cos\left(x + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3r}{2}\right) = -2 \sin\left(x + r\right) \cdot \sin\left(-\frac{r}{2}\right) = 2 \sin\left(x + r\right) \cdot \sin\left(\frac{r}{2}\right).$$

$$\cos\left(x + \frac{3r}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{5r}{2}\right) = -2 \sin\left(x + 2r\right) \cdot \sin\left(-\frac{r}{2}\right) = 2 \sin\left(x + 2r\right) \cdot \sin\left(\frac{r}{2}\right).$$

.....

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(x + (k-2)r + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + (k-1)r + \frac{r}{2}\right) = \\
 & = -2\sin\left[x + (k-1)r\right] \cdot \sin\left(-\frac{r}{2}\right) = 2\sin\left[x + (k-1)r\right] \cdot \sin\left(\frac{r}{2}\right) \\
 & \cos\left(x + (k-1)r + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + kr + \frac{r}{2}\right) = \\
 & = -2\sin(x + kr) \cdot \sin\left(-\frac{r}{2}\right) = 2\sin(x + kr) \cdot \sin\left(\frac{r}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Somando membro a membro, temos que:

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(x - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + kr + \frac{r}{2}\right) = \\
 & = \sin\left(\frac{r}{2}\right) [\sin x + \sin(x+r) + \sin(x+2r) + \dots + \sin(x+kr)] \Rightarrow \\
 & \sin x + \sin(x+r) + \sin(x+2r) + \dots + \sin(x+kr) = \frac{\cos\left(x - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(x + kr + \frac{r}{2}\right)}{2\sin\frac{r}{2}}
 \end{aligned}$$

Questão 45

Prove que:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos((2n+1)x)}{2} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\
 & = \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

Solução

Parte 1:

Provar que

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos((2n+1)x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Prova: Basta fazer $r = x$ e $k = n - 1$ na fórmula da questão 44.

Parte 2:

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos((2n+1)x)}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Prova:

Basta usar a fórmula $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Questão 46 (Fórmula da soma dos cossenos de arcos em P.A.)

Prove que:

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \dots + \cos(x+kr) = \frac{-\operatorname{sen}\left(x - \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + kr + \frac{r}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\frac{r}{2}}$$

Solução

$$-\operatorname{sen}\left(x - \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{r}{2}\right) = 2 \cos x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$-\operatorname{sen}\left(x + \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{3r}{2}\right) = 2 \cos(x+r) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$-\operatorname{sen}\left(x + \frac{3r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{5r}{2}\right) = 2 \cos(x+2r) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$\dots$$

$$-\operatorname{sen}\left(x + (k-2)r + \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + (k-1)r + \frac{r}{2}\right) = 2 \cos[x + (k-1)r] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$-\operatorname{sen}\left(x + (k-1)r + \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + kr + \frac{r}{2}\right) = 2 \cos(x+kr) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$$

Somando membro a membro, temos:

$$-\operatorname{sen}\left(x - \frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x + kr + \frac{r}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) [\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \dots + \cos(x+kr)] \Rightarrow$$

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \dots + \cos(x+kr) = \frac{-\sin\left(x - \frac{r}{2}\right) + \sin\left(x + kr + \frac{r}{2}\right)}{2 \sin \frac{r}{2}}$$

Questão 47

Prove que:

$$\cos x + \cos 2x + \cos(3x) + \dots + \cos(nx) =$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+1)x \cdot \cos nx}{\sin x} - 1.$$

Solução

Parte 1: Mostrar que

$$\cos x + \cos 2x + \cos(3x) + \dots + \cos(nx) = \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Na Fórmula da questão 46 faça $x = r$ e $k = n - 1$, daí temos que:

$$\cos x + \cos 2x + \cos(3x) + \dots + \cos(nx) = \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Parte 2: Mostrar que
$$\frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Prova:

Basta usar a fórmula $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Parte 3: Mostrar que
$$\frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+1)x \cdot \cos nx}{\sin x} - 1.$$

Prova:

$$\begin{aligned} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} &= \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - 1 = \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - 1 = \frac{\sin(n+1)x \cdot \cos nx}{\sin x} - 1. \end{aligned}$$

Nota: Neste último passo usamos a fórmula

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Questão 48

Prove que $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ$.

Solução : Caso particular do problema 49 para $a = 10$.

Questão 49

Prove que $\operatorname{tg}(30^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(3a) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + a) = \operatorname{tg} a$.

Solução

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(30^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(3a) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + a) &= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} a} \cdot \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - (\operatorname{tg}^3 a)}{[1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a]} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} a} = \\ &= \operatorname{tg} a \cdot \left[\frac{3 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \right] \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 a} = \operatorname{tg} a \cdot \left[\frac{3 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \right] \cdot \frac{\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 a}{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 a} = \\ &= \operatorname{tg} a \cdot \left[\frac{3 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \right] \cdot \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 a} = \operatorname{tg} a \cdot \left[\frac{3 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \right] \cdot \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}{3 - \operatorname{tg}^2 a} = \operatorname{tg} a. \end{aligned}$$

Questão 50

Quantos algarismo tem 2^{2000} ?

Solução

Seja m a quantidade de dígitos de 2^{2000} . Como 2^{2000} não é múltiplo de 10, temos que $10^m < 2^{2000} < 10^{m+1}$, onde $m+1$ é a quantidade de dígitos de 2^{2000} . Faça $2^{2000} = 10^t$, onde $m < t < m+1$.

Dai temos que $t = \log 2^{2000} = 2000 \cdot \log 2 \approx 2000 \cdot 0,30102 = 602,04$, logo 2^{2000} tem 603 dígitos.

Questão 51

Prove que: $\frac{\sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ} = \operatorname{tg} 40^\circ$.

Solução

Usando as fórmulas das questões 44 e 46, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ} &= \frac{\sin 25^\circ - \cos 55^\circ}{\sin 55^\circ - \sin 25^\circ} = \frac{-2 \sin 40^\circ \cdot \sin(-15^\circ)}{2 \sin 15^\circ \cdot \cos(40^\circ)} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \\ &= \operatorname{tg} 40^\circ. \end{aligned}$$

Questão 52

Prove que se a, b, c estão em P.A. então $\frac{\operatorname{sena} + \operatorname{sen} b + \operatorname{senc}}{\operatorname{cosa} + \operatorname{cos} b + \operatorname{cose}} = \operatorname{tg} b$.

Solução

Como a, b, c estão em P.A. então vale que $a = b - r$ e $c = b + r$.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sena} + \operatorname{sen} b + \operatorname{senc}}{\operatorname{cosa} + \operatorname{cos} b + \operatorname{cose}} &= \frac{\sin(b-r) + \sin b + \sin(b+r)}{\cos(b-r) + \cos b + \cos(b+r)} = \\ &= \frac{\sin b \cdot \cos r - \sin r \cdot \cos b + \sin b + \sin b \cdot \cos r - \sin r \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos r + \sin b \cdot \sin r + \cos b + \cos b \cdot \cos r - \sin b \cdot \sin r} = \\ &= \frac{\sin b \cdot [(2 \cos r) - 1]}{\cos b \cdot [(2 \cos r) - 1]} = \frac{\sin b}{\cos b} = \operatorname{tg} b. \end{aligned}$$

Questão 53

Sejam a, b dois lados de um triângulo tal que sua área é dada pela expressão $\frac{a^2 + b^2}{4}$, prove que este triângulo é retângulo.

Solução

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} \text{ e } A = \frac{a^2 + b^2}{4}. \text{ Por outro lado temos que } (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{4} \geq \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} \geq \frac{ab}{2} \Rightarrow \sin C \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin C = 1 \Rightarrow C = 90.$$

Questão 54

Prove as identidades trigonométricas:

- a) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + x)$
 b) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$
 c) $\cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} = \frac{1}{64}$
 d) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$
 e) $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$
 f) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$
 g) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

Solução

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + x) &= \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} \cdot [\operatorname{tg} x] \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} = \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \left[\frac{(3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x)}{(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x)} \right] = \operatorname{tg} 3x. \end{aligned}$$

b) Caso particular da letra a para $x = 20$.

c) **Solução 1:** Análogo à solução 1 da letra d.

Solução 2:

Usando a fórmula $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x \cdot \cos 32x = \frac{\sin 64x}{64 \sin x}$ e

fazendo $x = \frac{\pi}{64}$, temos o resultado.

d) **Solução 1:**

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ} = \\ &= \frac{(\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ) \cdot (\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ) \cdot (\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ)}{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ} = \\ &= \frac{\frac{\sin 40^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 160^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 80^\circ}{2}}{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Solução 2:

Usando a fórmula $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8 \sin x}$, temos que

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{e) } \operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\text{f) } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \sin x = -\cos x.$$

$$\text{g) } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \sin x = -\sin x.$$

Questão 55

Prove que $(1 - \cot x) \cdot (1 - \cot(45^\circ - x)) = 2$.

Solução

$$\begin{aligned}(1 - \cot x) &= 1 - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{2} \sin(x - 45^\circ)}{\sin x} = (1 - \cot(45^\circ - x)) = \\ &= 1 - \frac{\cos(45^\circ - x)}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{\sin(45^\circ - x) - \cos(45^\circ - x)}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{\sqrt{2} \sin(-x)}{\sin(45^\circ - x)}.\end{aligned}$$

Daí temos que:

$$\begin{aligned}(1 - \cot x) \cdot (1 - \cot(45^\circ - x)) &= \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin(x - 45^\circ)}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin(-x)}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{\sqrt{2} \sin(x - 45^\circ)}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin(x)}{-\sin(x - 45^\circ)} = 2.\end{aligned}$$

Questão 56

Sejam A, B, C ângulos de um triângulo, prove que:

a) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1.$

b) Se $\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

c) $\operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} 3B + \operatorname{sen} 3C = -4 \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{3B}{2} \cdot \cos \frac{3C}{2}.$

Solução

a) Como $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi-C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \left(\frac{A+B}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}$ e

$$\operatorname{tg} \left(\frac{A+B}{2} \right) = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)}{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}.$$

Daí temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) = \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= 1. \end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 2 \operatorname{sen} (2B + 2C) \cdot \cos (2B - 2C) =$
 $= 2 \operatorname{sen} (2\pi - 2A) \cdot \cos (2B - 2C) = -2 \operatorname{sen} (2A) \cdot \cos (2B - 2C).$
 $\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 4A - 2 \operatorname{sen} (2A) \cdot \cos (2B - 2C) =$
 $= 2 \operatorname{sen} 2A \cdot \cos 2A - 2 \operatorname{sen} (2A) \cdot \cos (2B - 2C) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \operatorname{sen} 2A \cdot (\cos 2A - \cos (2B - 2C)) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \operatorname{sen} 2A = 0$ ou $\cos 2A - \cos (2B - 2C) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2A = 0$ ou $2A = \pi$ ou $2A = 2B - 2C$ ou $2A + 2B - 2C = 2\pi$, logo $A = 0$ ou

$$A = \frac{\pi}{2} \text{ ou } B = A + C \text{ ou } A + B - C = \pi. \text{ Então, } A = \frac{\pi}{2} \text{ ou } B = \frac{\pi}{2}.$$

c) Como $A + B + C = \pi \Rightarrow 3A + 3B = 3\pi - 3C \Rightarrow \frac{3A + 3B}{2} = \frac{3\pi - 3C}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}.$
 $\operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} 3B + \operatorname{sen} 3C = 2 \operatorname{sen} \frac{3A + 3B}{2} \cdot \cos \frac{3A - 3B}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{3C}{2} \cdot \cos \frac{3C}{2}.$

Pela questão 10 (letras f, g) temos que $\operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} 3B + \operatorname{sen} 3C =$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3A-3B}{2} - 2 \cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3A+3B}{2} = \\
 &= -2 \cos \frac{3C}{2} \left(\cos \frac{3A-3B}{2} + \cos \frac{3A+3B}{2} \right) = -2 \cos \frac{3C}{2} \left(2 \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{3B}{2} \right) = \\
 &= -4 \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2}.
 \end{aligned}$$

Questão 57 (ITA 2004)

Prove se os ângulos α , β , γ de um triângulo satisfazem a equação:

$$\sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) = 0,$$

então pelo menos um dos ângulos α , β , γ é igual a 60° .

Solução

Pela questão 56 letra c, temos que:

$$\sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) = -4 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\beta}{2} \cos \frac{3\gamma}{2}, \text{ logo } \cos \frac{3\alpha}{2} = 0$$

$$\text{ou } \cos \frac{3\beta}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{3\gamma}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ ou}$$

$$\beta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Questão 58 (ITA 2002)

Se x , y , z são ângulos internos de um triângulo ABC e $\sin x = \frac{\sin y + \sin z}{\cos y + \cos z}$,

prove que o triângulo ABC é retângulo.

Solução 1

Como $x + y + z = 180^\circ \Rightarrow y + z = 180^\circ - x$.

$$\sin x = \frac{\sin y + \sin z}{\cos y + \cos z} \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2}}{2 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \left(90^\circ - \frac{x}{2} \right)}{\cos \left(90^\circ - \frac{x}{2} \right)} = \frac{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} \cdot [(2 \sin^2 \frac{x}{2}) - 1] = 0 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ ou } \sin \frac{x}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

No primeiro caso, temos que $\frac{x}{2} = 0^\circ$ ou $\frac{x}{2} = 180^\circ$, não havendo solução em nenhum desses casos. No segundo caso, temos que $\frac{x}{2} = -45^\circ$ ou $\frac{x}{2} = 45^\circ$ logo $x = \pm 90^\circ$. Assim temos que o triângulo é retângulo.

Questão 59

Prove que $\operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ = 4$.

Solução 1

$$\operatorname{tg} 81 + \operatorname{tg} 9 = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 81^\circ \cdot \cos 9^\circ} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 63^\circ \cdot \cos 27^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ =$$

$$= \frac{1}{\cos 81^\circ \cdot \cos 9^\circ} - \frac{1}{\cos 63^\circ \cdot \cos 27^\circ} = \frac{\cos 63^\circ \cdot \cos 27^\circ - \cos 81^\circ \cdot \cos 9^\circ}{\cos 81^\circ \cdot \cos 9^\circ \cdot \cos 63^\circ \cdot \cos 27^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 27^\circ \cdot \cos 27^\circ - \sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ}{\sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ \cdot \sin 27^\circ \cdot \cos 27^\circ} = \frac{\frac{\sin 54^\circ}{2} - \frac{\sin 18^\circ}{2}}{\frac{\sin 54^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 18^\circ}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{2}}{\frac{\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ}{2}} = \frac{2 \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ} = \frac{\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ} = 4.$$

Solução 2

Note que as raízes da equação $\operatorname{tg} 5x = 1$, são $\operatorname{tg} 9^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$, $\operatorname{tg} 81^\circ$, $\operatorname{tg} 117^\circ$ e $\operatorname{tg} 153^\circ$.

$$\text{Como } \operatorname{tg} (5x) = \frac{\operatorname{tg}^5 x - 10 \operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{tg} x}{5 \operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^2 x + 1}, \text{ temos que } \operatorname{tg} 5x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^5 x - 10 \operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{tg} x}{5 \operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^2 x + 1} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^5 x - 5 \operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^3 x - 5 \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Usando as relações de Girard, temos que:

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ + \operatorname{tg} 117^\circ + \operatorname{tg} 153^\circ = 5$$

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ = 4, \text{ pois } \operatorname{tg} (180^\circ - x) = -\operatorname{tg} x \text{ e } \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Questão 60

Se x, y, z são ângulos internos de um triângulo ABC e $\cos x + \cos y = \sin z$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

Solução

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) = 2 \sin \frac{z}{2} \cdot \cos \frac{z}{2}. \text{ Como } x+y+z = \\ &= 180^\circ, \text{ temos que } \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) = \sin \frac{z}{2}. \text{ Assim temos que: } \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) = \\ &= \cos \frac{z}{2} \Rightarrow x-y = z \text{ ou } x-y = -z. \end{aligned}$$

No primeiro caso temos que $x = y + z = 90^\circ$. E no segundo caso temos que $y = x + z = 90^\circ$. Em ambos casos temos que o triângulo é retângulo.

Questão 61

Prove que $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Solução

Usando a fórmula da questão 47, temos que:

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \left(\frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Questão 62

Prove que:

a) $\cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1}a = \frac{\sin 2^n a}{2^n \cdot \sin a}$

b) $\frac{1}{\sin a} = \cot \frac{a}{2} - \cot a$, para todo $a \neq \frac{k\pi}{2}$.

c) $\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n a} = \cot \frac{a}{2} - \cot 2^n a$.

Solução

a) Vamos provar isso por indução:

i) Para $n = 1$, temos que $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$.

ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$.

$$\cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^{k-1}a = \frac{\sin 2^k \cdot a}{2^k \cdot \operatorname{sen} a} \quad (\text{H.I.})$$

iii) Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^{k-1}a \cdot \cos 2^k a &= \\ \left(\frac{\sin 2^k \cdot a}{2^k \cdot \operatorname{sen} a} \right) \cdot \cos 2^k a &= \left(\frac{\sin 2^k \cdot a}{2^k \cdot \operatorname{sen} a} \right) \cdot \cos 2^k a \cdot \left(\frac{2 \sin 2^k \cdot a}{2 \sin 2^k \cdot a} \right) = \frac{\sin 2^{k+1} \cdot a}{2^{k+1} \cdot \operatorname{sen} a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cot \frac{a}{2} - \cot a &= \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} - \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{-\cos a \cdot \sin \frac{a}{2} + \operatorname{sen} a \cdot \cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cdot \operatorname{sen} a} = \\ &= \frac{2 \left(\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{a}{2} \right) - \cos a \cdot \sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cdot \operatorname{sen} a} = \frac{2 \left(\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \right) - \cos a}{\operatorname{sen} a} \end{aligned}$$

Como $\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$, temos que:

$$\frac{2 \left(\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \right) - \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{(1 + \cos a) - \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$$

c) Pela letra b temos que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} a} = \cot \frac{a}{2} - \cot a$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2a} = \cot a - \cot 2a$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 4a} = \cot 2a - \cot 4a$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2^{n-1}a} = \cot 2^{n-2}a - \cot 2^{n-1}a$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2^n a} = \cot 2^{n-1}a - \cot 2^n a$$

Somando termo a termo, temos que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} a} + \frac{1}{\operatorname{sen} 2a} + \frac{1}{\operatorname{sen} 4a} + \dots + \frac{1}{\operatorname{sen} 2^n a} = \cot \frac{a}{2} - \cot 2^n a.$$

Questão 63

Calcule o período das funções abaixo:

- a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
- b) $\operatorname{sen} x + \cos x$
- c) $\operatorname{sen} x - \cos x$
- d) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x$
- e) $\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x$
- f) $\operatorname{sen}^2 x$
- g) $\cos^2 x$
- h) $\operatorname{tg} 3x + \cos 4x$
- i) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}$
- j) $\frac{\cos 3x}{\operatorname{cotg} 8x}$
- l) $\sec \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sen} 3x$

Solução

a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x$, logo $p = \pi$.

b) Já sabemos que

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} (x + 45^\circ)$$

logo $p = 2\pi$.

c) Análogo a letra b.

d) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x \right] = 2 \operatorname{sen} (x + 60^\circ)$, logo $p = 2\pi$.

e) Análogo a letra d

f) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, logo $p = \pi$.

g) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$, logo $p = \pi$.

Antes de fazermos as próximas letras vamos a um teorema:

Teorema do período da soma de duas funções periódicas

Sejam f e g duas funções periódicas cujos períodos são p_1 e p_2 onde $p_1 \neq p_2$.

Se $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos e primos entre si. Então a função $h = f + g$ é periódica e seu período é $P = mp_2 = np_1$.

Prova:

Devemos provar que existe um T tal que $h(x + T) = h(x)$, para todo x pertencente ao domínio de h . Como os períodos são p_1 e p_2 , temos que:

$$f(x + knp_1) = f(x), \text{ para todo } k \text{ inteiro.}$$

$$g(x + kmp_2) = g(x), \text{ para todo } k \text{ inteiro.}$$

Somando membro a membro, temos que:

$$f(x) + g(x) = f(x + knp_1) + g(x + kmp_2).$$

$$\text{Como } \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow mp_2 = np_1.$$

$$\text{Fazendo } kmp_2 = knp_1 = T.$$

Dai temos que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x + knp_1) + g(x + kmp_2) = f(x + T) + g(x + T) = (f + g)(x + T).$$

Dai temos que f é periódica. Como, por definição, período é o menor T positivo, fazendo $k = 1$, obtemos o período da função $h = f + g$.

Logo temos que o período é $P = mp_2 = np_1$.

Colorário do Teorema

Podemos provar a válida do teorema também pra $h = f \cdot g$ ou $h = f - g$ ou $h = \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$).

h) Como $p_1 = \frac{\pi}{3}$ e $p_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}$. Fazendo o uso do teorema temos que $p = \pi$.

i) Como $p_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ e $p_2 = \frac{\pi}{3} = 3\pi \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{3}$. Fazendo o uso do teorema temos que $p = 12\pi$.

j) Análogo à letra i. Resposta $p = 2\pi$.

l) Análogo à letra i. Resposta $p = 4\pi$.

Questão 64

Resolva as equações:

- a) $\sin x + \cos x + 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = 0$.
 b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$
 c) $\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = -\sqrt{2}$.

Solução

a) Faça $\sin x + \cos x = t \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = t^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{-1+t^2}{2}$. Daí temos que:

$$t + 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-1+t^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow t + \sqrt{2} t^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2t + 2\sqrt{2} t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ou $t = -\sqrt{2}$. Logo temos que $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

Caso 1: $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Caso 2: $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = -1 \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

b) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) =$
 $= (\sin x + \cos x) \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x).$

Faça $t = \sin x + \cos x$, daí temos que:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = t \cdot \left[1 - \frac{(-1+t^2)}{2} \right] = 1 \Rightarrow t^3 - 3t + 2 = 0.$$

Claramente 1 é raiz desse polinômio daí temos que:

$$t^3 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 \cdot (t+2) = 0.$$

Caso 1: $\sin x + \cos x = -2$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = -2, \text{ que não tem solução.}$$

Caso 2: $\sin x + \cos x = 1$.

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = 1 \Rightarrow \cos \left(-\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + x = \\ &= \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.} \end{aligned}$$

c) $\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x)$. Daí temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cdot \cos^2 x &= \sqrt{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x) \right] - \sin 2x - \\ &- \sqrt{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x) \right] = -\sin 2x - \sqrt{3} \cdot \cos 2x. \end{aligned}$$

Logo temos que $-\sin 2x - \sqrt{3} \cdot \cos 2x = -\sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cdot \cos 2x = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{ou } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Questão 65 (ITA 96)

Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, tal que $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Então o valor de

$$y = \frac{\sin 2\alpha}{(\cos \alpha)^3 + (\sin \alpha)^3} \text{ será:}$$

- a) $\frac{2(-1+m^2)}{m(4-m^2)}$ b) $\frac{2(1+m^2)}{m(4+m^2)}$ c) $\frac{2(-1+m^2)}{m(3-m^2)}$ d) $\frac{2(1+m^2)}{m(3+m^2)}$
 e) $\frac{2(1+m^2)}{m(3-m^2)}$

Solução

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \alpha = m &\Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin 2\alpha = m^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot$$

$$(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = m \cdot \left[1 - \left(\frac{-1 + m^2}{2} \right) \right] = m \cdot \left(\frac{3 - m^2}{2} \right), \text{ logo}$$

$$y = \frac{2(-1 + m^2)}{m(3 - m^2)}.$$

Questão 66 (ITA 98)

A soma das raízes da equação

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \cdot \sin 2x + \cos 2x = 0,$$

que pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $\frac{17\pi}{4}$

d) $\frac{14\pi}{3}$

b) $\frac{16\pi}{3}$

e) $\frac{13\pi}{4}$

c) $\frac{15\pi}{4}$

Solução 1:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \cdot \sin 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (\operatorname{tg} x - \sin 2x) + \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sin x - 2 \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x} \right) + \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sin x - (1 - 2 \cos^2 x)}{\cos x} \right) + \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sin x - (-\cos 2x)}{\cos x} \right) + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x \cdot (1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } 1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Caso 1: $\cos 2x = 0$.

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, logo as soluções no intervalo citado são: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Caso 2: $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, logo as soluções no intervalo citado são $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Logo a soma das soluções no intervalo citado é:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{16\pi}{3}.$$

Questão 67 (ITA 2000)

Para x no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o conjunto de todas as soluções da inequação:

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

é o intervalo definido por:

a) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

Solução

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} \frac{\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} \cdot \cos \frac{\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \operatorname{sen} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \cdot \cos \frac{\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} < 0. \text{ Note que } \frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{4} \leq \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{logo } 2 \operatorname{sen} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \cdot \cos \frac{\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} < 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq$$

$$\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5x}{2} \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{5x}{2} \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{4} \leq 5x \leq \frac{10\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{10} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Questão 68

Prove que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$.

Solução

Note que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{5\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}, \operatorname{tg} \pi$, são raízes da equação

$$-\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 3x. \text{ Como } \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \text{ e } \operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg}^4 x - 6 \operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

$$\text{Logo } -\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = - \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg}^4 x - 6 \operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

Fazendo $\operatorname{tg} x = y$ e resolvendo a equação acima temos que

$$y^7 - 21y^5 + 35y^3 - 7y = 0 \Rightarrow y(y^6 - 21y^4 + 35y^2 - 7) = 0.$$

Assim as raízes da equação $y^6 - 21y^4 + 35y^2 - 7 = 0$ são $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7},$

$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{5\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}$, logo temos que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} = -7$.

Como $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{5\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}$ e $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$, temos que

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} \right)^2 = 7 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \pm \sqrt{7}.$$

E como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} > 0$, logo $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$.

Questão 69

Calcule o valor das expressões:

a) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7}$

b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7}$

$$c) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7}$$

Solução

As raízes da equação $y^6 - 21y^4 + 35y^2 - 7 = 0$ são $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}$, e como $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}$ e $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$. Fazendo $w = t^2$, temos que as raízes da equação $w^3 - 21w^2 + 35w - 7 = 0$, são $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7}$ e $\operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7}$. Assim usando as relações de Girard, temos que

$$a) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7} = 7$$

$$b) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7} = 21$$

$$c) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{7} = 35$$

Questão 70

Prove que $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Solução

Já sabemos que $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8 \sin x}$, daí temos que:

$$\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{\left(\sin \frac{8\pi}{7} \right)}{\left(8 \sin \frac{\pi}{7} \right)} = -\frac{1}{8}, \text{ pois } \sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

Questão 71

Resolva as equações:

$$a) \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$$

$$b) \sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$$

$$c) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

$$d) \sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x$$

$$e) \sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cdot \cos 13x$$

$$f) \sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x$$

$$g) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{-1 + 2\cos 3x}{2}$$

$$h) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{-3 + 4\sin 4x}{4}$$

$$i) \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{4}{5}$$

$$j) \cos x + \cos 2x + \cos (\pi - 3x) = \frac{8}{5}$$

$$k) \sin 3x = \cos 2x$$

Solução

$$a) \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$$

Já sabemos que $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{\sin 16x}{16 \sin x}$. Logo temos que:

$$\frac{\sin 16x}{16 \sin x} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin 16x = \sin x \Rightarrow 16x = x + 2k\pi \text{ ou } 16x = (\pi - x) + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{15} \text{ ou } x = \frac{\pi + 12k\pi}{17}, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

$$b) \sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0 \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= -\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi + \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} =$$

$$= 2\pi - \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

$$c) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

$$\sin x + \sin 4x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\sin 2x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{logo } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \left(\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \right) = 0, \text{ logo } \sin \frac{5x}{2} = 0 \text{ ou} \\ \cos x &= 0 \text{ ou } \cos \frac{x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Caso 1: $\sin \frac{5x}{2} = 0$

$$\sin \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Caso 2: $\cos \frac{x}{2} = 0$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Caso 3: $\cos x = 0$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

d) $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x$

$$\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x \Rightarrow \frac{1}{2} [\sin 8x + \sin 2x] = \frac{1}{2} [\sin 16x + \sin 2x]$$

$$\Rightarrow \sin 8x = \sin 16x \Rightarrow 16x = 8x + 2k\pi \text{ ou } 16x = (\pi - 8x) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou}$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}.$$

e) $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cdot \cos 13x$

$$\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos 13x \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 13x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos 13x \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \cos 13x \Rightarrow 13x = \frac{\pi}{4} - x +$$

$$+ 2k\pi \text{ ou } 13x = -\frac{\pi}{4} + x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{56} + \frac{k\pi}{7} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{6}.$$

f) $\sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x$

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \cos 2x &= 2 - \sin 2x \Rightarrow \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) - \cos 2x = 2 - \sin 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1 - 3\cos 2x}{2} &= \frac{4 - 2\cos 2x}{2} \Rightarrow 2 \sin 2x - 3 \cos 2x = 3. \end{aligned}$$

Fazendo $a = \sin 2x$ e $b = \cos 2x$, temos que: $2a - 3b = 3$ e $a^2 + b^2 = 1$. Resolvendo este sistema, temos que as soluções são: $(0, -1)$ e $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$.

Assim, temos que $\sin 2x = 0$ ou $\sin 2x = \frac{12}{13}$. Logo temos que $2x = k\pi$ ou

$x = \arccos \pm \frac{3\sqrt{13}}{13}$, onde x está no segundo ou terceiro quadrante, logo

$x = \frac{k\pi}{2}$, onde k é inteiro ou $x = \arccos \pm \frac{\sqrt{26}}{26}$, onde x está no segundo ou terceiro quadrante.

$$\text{Nota: } \cos 2x = -\frac{5}{13} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{g) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{-1 + 2\cos 3x}{2}.$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2(\sin x \cos x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 - \sin^2 2x}{2}.$$

$$\text{Como } 0 \leq \frac{\sin^2 2x}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1 - \sin^2 2x}{2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1 \quad \text{e} \quad -\frac{3}{2} \leq \frac{-1 + 2\cos 3x}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Assim, temos que a igualdade só ocorre se } \frac{-1 + 2\cos 3x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

$$\text{h) } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{-3 + 4\sin 4x}{4}.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = (\sin^4 x -$$

$$-\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 + \cos^4 x).$$

$$\text{Como } \frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1 \text{ e } 0 \leq \frac{\sin^2 2x}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1.$$

Por outro lado temos que $-\frac{7}{4} \leq \frac{-3 + 4 \sin 4x}{4} \leq \frac{1}{4}$. Logo a igualdade só

$$\text{ocorre se } \frac{-3 + 4 \sin 4x}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$\text{i) } \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{4}{5}$$

Lema: $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x < \frac{3}{4}$, para todo x real.

Prova:

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x &= \left(\frac{\cos x - \cos 3x}{2} \right) \cdot \sin 3x = \\ &= \frac{2 \sin 3x \cdot \cos x - 2 \sin 3x \cdot \cos 3x}{4} = \frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x}{4}. \end{aligned}$$

E como $\sin 2x \leq 1$, $\sin 4x \leq 1$, $\sin 6x \leq 1$, então $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \leq \frac{3}{4}$.

Falta-nos mostrar que a igualdade não ocorre. Para a igualdade ocorrer é preciso que:

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 4x = 1 \\ \sin 6x = -1 \end{cases}$$

Como $\sin 2x = 1$, temos que $\cos 2x = 0$. Logo $\sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$, o que é impossível, o que nos permite concluir que a igualdade não ocorre. Com isso, fica claro que a equação acima não tem solução.

$$\text{j) } \cos x + \cos 2x + \cos (\pi - 3x) = \frac{8}{5}$$

Vamos provar algo mais geral:

Lema: Se A, B, C são tais que $A + B + C = \pi$, então vale que $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Prova:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) + \cos C.$$

$$\text{Como } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}.$$

Como $0 \leq \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \leq 1$, então temos que:

$$\cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \leq \sin \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \right).$$

Fazendo $t = \sin \frac{C}{2}$, temos que $\cos A + \cos B + \cos C \leq -2t^2 + 2t + 1$.

$$\text{Note que } -2t^2 + 2t + 1 \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow -4t^2 + 4t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -(2t-1)^2 \leq 0.$$

Isso prova a propriedade. Com isso, fica claro que a equação do problema não tem solução.

k) $\sin 3x = \cos 2x$

$$\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) - \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0 \text{ ou } \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}.$$

Questão 72

$$\text{Prove que } \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{7} + \arctg \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Solução

Faça $x = \arctg \frac{1}{3}$, $y = \arctg \frac{1}{5}$, $z = \arctg \frac{1}{7}$ e $w = \arctg \frac{1}{8}$.

Assim, temos que $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} z = \frac{1}{7}$, $\operatorname{tg} w = \frac{1}{8}$.

$$\text{Daí: } \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{4}{7} \text{ e } \operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} w} = \frac{3}{11}.$$

Logo temos que $\operatorname{tg}[(x+y) + (z+w)] = \frac{\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{tg}(z+w)}{1 - \operatorname{tg}(x+y) \cdot \operatorname{tg}(z+w)} = 1$, logo temos

$$\text{que } x + y + z + w = \frac{\pi}{4}.$$

Questão 73 (IME 2004)

Se $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = A$ e $\cos x + \cos y = B$ e $AB \neq 0$, calcule $\operatorname{sen}(x+y)$ em função de A e B .

Solução

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = A \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) = A.$$

$$\cos x + \cos y = B \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) = A.$$

Daí temos que:

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{x+y}{2} \right) = \frac{A}{B}.$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}, \text{ temos que: } \operatorname{sen}(x+y) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{2}} = \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

Questão 74

Prove que $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.

Solução

Já sabemos que $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} (60-x) \cdot \operatorname{tg} (60+x)$.

Em particular, para $x = 25^\circ$, temos que:

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 65^\circ} \cdot \operatorname{tg} 85^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 55^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ.$$

Questão 75

Ache uma equação do terceiro grau cujas raízes são $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, $\cos \frac{5\pi}{7}$.

Solução

Note que $\frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$, $3 \cdot \frac{3\pi}{7} + 4 \cdot \frac{3\pi}{7} = 3\pi$ e $3 \cdot \frac{5\pi}{7} + 4 \cdot \frac{5\pi}{7} = 5\pi$.

Logo $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$ são soluções da equação $\cos 4x = -\cos 3x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 4x + \cos 3x = 0 \Rightarrow 2 \cos \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{7x}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Parte 1: Resolver a equação $\cos \frac{7x}{2} = 0$

$$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}, \text{ mas}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} = \cos \frac{13\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7} = \cos \frac{11\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7} = \cos \frac{9\pi}{7}.$$

Logo há 4 soluções distintas $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{7}$, π .

Parte 2: Resolver a equação $\cos \frac{x}{2} = 0$.

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi; \text{ logo, } x = \pi \text{ é a única solução.}$$

Por outro lado, temos que:

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \text{ e } \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\cos 4x = -\cos 3x \Rightarrow 8 \cos^4 x + 4 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = 0, \text{ onde } t = \cos x.$$

Claramente -1 é raiz desse polinômio, portanto:

$$8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = (t + 1)(8t^3 - 4t^2 - 4t + 1)$$

Assim, o polinômio $8t^3 - 4t^2 - 4t + 1$ tem como raízes $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, $\cos \frac{5\pi}{7}$.

Questão 76

Calcule o valor das expressões:

a) $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

b) $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

c) $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

Solução

Pela questão anterior e usando as relações de Girard, temos:

a) $-\frac{1}{8}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

Questão 77

Resolva o sistema abaixo:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^3 - 3x = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Solução

Como $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leq 1$, logo podemos fazer $x = \cos \alpha$.

Dai temos que $4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha) \Rightarrow$

$$\cos(3\alpha) - \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow -2 \sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Parte 1: Resolver a equação $\sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 0$

$$\frac{5\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{5}, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Parte 2: Resolver a equação $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$

$$\frac{\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = 2k\pi, \text{ onde } k \text{ é inteiro.}$$

Logo as soluções são $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(\cos \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}\right)$, $\left(\cos \frac{4\pi}{5}, \sin \frac{4\pi}{5}\right)$, $\left(\cos \frac{6\pi}{5}, \sin \frac{6\pi}{5}\right)$, $\left(\cos \frac{8\pi}{5}, \sin \frac{8\pi}{5}\right)$.

Questão 78

Prove as identidades:

a) $\cos 3x \cdot \cos x - \cos 6x \cdot \cos 2x - \sin 5x \cdot \sin 3x = 0.$

b) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) =$
 $= 4 \cdot \sin \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{z+y}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{x+z}{2}\right).$

c) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$

d) Se $A + B + C = \pi$, prove que:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

e) $\cos x + \cos y + \cos z - \cos(x + y + z) =$
 $= 4 \cdot \cos \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{z+y}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x+z}{2}\right)$

f) $2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2(\alpha + \beta)$

Solução

a) $\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cdot \cos x$

$$\cos 8x + \cos 4x = 2 \cos 6x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 8x - \cos 2x = -2 \sin 5x \cdot \sin 3x.$$

Somando as três expressões, membro a membro, temos que:

$$(\cos 4x + \cos 2x) - (\cos 8x + \cos 4x) + (\cos 8x - \cos 2x) =$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos x = -2 \cos 6x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \sin 3x = 0.$$

b) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) =$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin z - \sin(x + y + z) = 2 \sin \left(\frac{-x-y}{2}\right) \cdot \cos \left(z + \frac{x+y}{2}\right) =$$

$$= -2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(z + \frac{x+y}{2} \right).$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} (x+y+z) =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \left[-\cos \left(z + \frac{x+y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \right].$$

$$\text{Note que } \left[-\cos \left(z + \frac{x+y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \right] = -2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{z+y}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{-z-y}{2} \right) =$$

$$2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{z+y}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{z+y}{2} \right), \text{ logo temos que:}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} (x+y+z) = 4 \cdot \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{z+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+z}{2} \right).$$

$$\text{c) } \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} &= -2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{\left(2 \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos 3 \frac{\pi}{10}} = \\ &= \frac{\left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10} \right) \cdot \left(2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos 3 \frac{\pi}{10}} = \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{10} \cdot \operatorname{sen} \frac{6\pi}{10} \right)}{\left(2 \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos 3 \frac{\pi}{10} \right)}. \end{aligned}$$

$$\text{Note que } \operatorname{sen} \frac{2\pi}{10} = \cos \frac{3\pi}{10}, \text{ pois } \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}. \text{ E } \operatorname{sen} \frac{6\pi}{10} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) =$$

$$\cos \frac{\pi}{10}. \text{ Logo, } \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{d) Se } A+B+C=\pi, \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A + 2 \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} =$$

$$\operatorname{sen} A + 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} =$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \left(\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) =$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{e) } \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x + y + z) = 4 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{z+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+z}{2} \right).$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

$$\cos z + \cos(x + y + z) = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(z + \frac{x+y}{2} \right).$$

Somando membro a membro, temos:

$$\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x + y + z) =$$

$$= 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \left[\cos \left(z + \frac{x+y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \right] =$$

$$= 4 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{y+z}{2} \right)$$

$$\text{f) } 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + 2 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta +$$

$$+ (-\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) =$$

$$= (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + (\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha) + (\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \beta) -$$

$$- 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + (\cos^2 \alpha) \cdot (-1 + \cos^2 \beta) + (\cos^2 \beta) \cdot (-1 + \cos^2 \alpha) -$$

$$- 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + (\cos^2 \alpha) \cdot (-\sin^2 \beta) + (\cos^2 \beta) \cdot (-\sin^2 \alpha) -$$

$$- 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta)^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2(\alpha + \beta)$$

Questão 79

Calcule o valor da expressão:

$$4 \cos^3 \frac{2\pi}{9} - 3 \cos \frac{2\pi}{9} - 4 \sin^3 \frac{2\pi}{9} + 3 \sin \frac{2\pi}{9}$$

Solução

$$4 \cos^3 \frac{2\pi}{9} - 3 \cos \frac{2\pi}{9} = \cos \left(3 \cdot \frac{2\pi}{9} \right) = -\frac{1}{2}.$$

$$-4 \sin^3 \frac{2\pi}{9} + 3 \sin \frac{2\pi}{9} = \sin \left(3 \cdot \frac{2\pi}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo a expressão vale $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Questão 80

Resolva a equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Solução

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (4x^3 - 3x) = 1 \Rightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}.$$

Vamos achar as raízes tais que $|x| \leq 1$. Faça $x = \cos \alpha$. Teremos então:

$$\cos(3\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3\alpha = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \alpha =$$

$$\frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}.$$

Logo há 3 soluções: $\cos \frac{\pi}{18}$, $\cos \frac{13\pi}{18}$, $\cos \frac{25\pi}{18}$.

Nota: Claramente não há soluções tais que $|x| > 1$, pois a equação é do terceiro grau e portanto, possui apenas 3 raízes.

Questão 81

Resolva as inequações:

a) $1 - \sin x \geq \cos^2 x$

b) $\sin x < \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$

c) $\sin x + \cos x > 1$

d) $\cos 2x \geq \cos x$

e) $\cos x + \sqrt{3} \sin x > \sqrt{2}$

$$f) \sin x \cdot \cos x > \frac{1}{4}$$

$$g) 3 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x > \frac{5}{2}$$

Solução

$$a) 1 - \sin x \geq \cos^2 x$$

$$1 - \sin x \geq \cos^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (\sin x - 1) \geq 0.$$

Caso 1: $\sin x \geq 0$ e $(\sin x - 1) \geq 0$

Neste caso, temos que $\sin x \geq 1$. Então, $\sin x = 1$; logo temos que $x = \frac{\pi}{2}$.

Caso 2: $\sin x \leq 0$ e $(\sin x - 1) \leq 0$

Neste caso, temos que $\sin x \leq 1$ é sempre verdade. Portanto basta termos $\sin x \leq 0$, logo a solução é $\pi \leq x \leq 2\pi$.

$$b) \sin x > \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right).$$

Assim temos que:

$$\sin x > \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \Leftrightarrow 0 < \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sin x \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{8} + x \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{8} + x \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{8} + x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{8} < x < \frac{11\pi}{8}.$$

$$c) \sin x + \cos x > 1$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) > 1 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$d) \cos 2x \geq \cos x$$

$$\cos 2x \geq \cos x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos x \leq \frac{-1}{2} \text{ ou}$$

$$\cos x \geq 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi.$$

$$e) \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x > \sqrt{2}$$

$$\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x +$$

$$+ \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + x < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}$$

$$f) \sin x \cdot \cos x > \frac{1}{4}$$

$$\sin x \cdot \cos x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$$

$$g) 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x > \frac{5}{2}$$

$$3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x < \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$$

Questão 82

Prove as identidades:

$$a) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$c) 2 \cdot \arctg \frac{2}{3} + \arccos \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

Solução

$$a) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Seja $\alpha = \arcsin x$ e $\beta = \arccos x \Rightarrow \sin \alpha = x$ e $\cos \beta = x \Rightarrow$

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \Rightarrow \sin \alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Seja } \alpha = \arctg \frac{1}{2} \text{ e } \beta = \arctg \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dai temos que } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{c) } 2 \cdot \arctg \frac{2}{3} + \arccos \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Seja } \alpha = \arctg \frac{2}{3} \text{ e } \beta = \arccos \frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \text{ e } \cos \beta = \frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Como } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{(2 \cos \alpha)}{3}.$$

Dai temos que:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{(2 \cos \alpha)}{3} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{13} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{4}{13} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ e } \cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos \beta + \cos 2\alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cdot \cos \beta + (-\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \operatorname{sen} \beta = \\ &= \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = 1 \Rightarrow 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Questão 83

Resolva a equação: $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

Solução

Note que o primeiro e o quinto termos são iguais; o mesmo ocorre com o segundo e o quarto termo. Por isso, esta equação é uma equação recíproca. Para resolver uma equação recíproca, devemos fazer a seguinte substituição:

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Daí faça $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \Rightarrow 6y^2 - 35y + 50 = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$ ou $y = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ ou $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$

Questão 84 (IME)

Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2995 \cdot 2998} + \frac{1}{2998 \cdot 3001}.$$

Solução

Pela fórmula da questão 13 letra c, essa soma vale $\frac{1000}{3001}.$

Questão 85

Prove que $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < 3$, para todo n natural.

Solução

É fácil ver que $\frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$

logo $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < 3.$

Questão 86

Sejam a, b, c as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 0$. Calcule o valor de:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$

c) $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

$$d) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}$$

$$e) a^2 + b^2 + c^2$$

$$f) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$g) \frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$$

$$h) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

$$i) \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c}$$

$$j) \frac{bc+ac}{ab} + \frac{ab+ac}{bc} + \frac{ab+bc}{ac}$$

$$k) \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

Solução

$$a) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{7}{9}$$

$$b) \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{5}{9}$$

$$c) \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} =$$

$$= \frac{(1+b) \cdot (1+c)}{(1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c)} + \frac{(1+a) \cdot (1+c)}{(1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c)} + \frac{(1+b) \cdot (1+a)}{(1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c)} =$$

$$= \frac{(1+ab+a+b) + (1+ac+a+c) + (1+bc+b+c)}{1+(a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc} =$$

$$= \frac{3+2 \cdot (a+b+c) + (ab+ac+bc)}{1+(a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc} = \frac{3+2 \cdot (5) + (7)}{1+(5) + (7) + (9)} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

$$d) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{1}{5-c} + \frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-a} =$$

$$= \frac{(5-a) \cdot (5-b) + (5-b) \cdot (5-c) + (5-a) \cdot (5-c)}{(5-a) \cdot (5-b) \cdot (5-c)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(25 - 5a - 5b + ab) + (25 - 5b - 5c + bc) + (25 - 5a - 5c + ac)}{125 - 25 \cdot (a + b + c) + 5 \cdot (ab + ac + bc) + abc} = \\
 &= \frac{(75 - 10(a + b + c) + (ab + ac + bc))}{125 - 25 \cdot (a + b + c) + 5 \cdot (ab + ac + bc) + abc} = \frac{75 - 50 + 7}{125 - 125 + 35 + 9} = \frac{32}{44} = \frac{8}{11}.
 \end{aligned}$$

e) $a + b + c = 5 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 25 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 25 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 25 - 14 = 11.$

f) $ab + ac + bc = 7 \Rightarrow (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2(abc) \cdot (a + b + c) = 49 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2 \cdot (9) \cdot (5) = 49 \Rightarrow (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 = -41.$

Dai temos que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}{(abc)^2} = -\frac{41}{81}.$

g) $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} = 1 + \frac{1-a}{1+a} + 1 + \frac{1-b}{1+b} + 1 + \frac{1-c}{1+c} - 3 =$
 $= 2\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) - 3 = 2\left(\frac{10}{11}\right) - 3 = \frac{-13}{11}$

h) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} - 3 =$
 $= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = 5\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right) - 3 = 5\left(\frac{8}{11}\right) - 3 = \frac{7}{11}$

i) $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} = 1 + \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{a+c}{b} + 1 + \frac{b+a}{c} - 3 =$
 $= 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 = 5\left(\frac{7}{9}\right) - 3 = \frac{8}{9}$

j) $\frac{bc+ac}{ab} + \frac{ab+ac}{bc} + \frac{ab+bc}{ac} =$
 $= 1 + \frac{bc+ac}{ab} + 1 + \frac{ab+ac}{bc} + 1 + \frac{ab+bc}{ac} - 3 =$

$$= (ab + ac + bc) \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) - 3 = 7 \left(\frac{7}{9} \right) - 3 = \frac{22}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} &= 1 - \frac{1}{1+a} + 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = \\ &= 3 - \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right) = 3 - \frac{10}{11} = \frac{23}{11}. \end{aligned}$$

Questão 87

Prove que $\operatorname{tg}^2 1^\circ + \operatorname{tg}^2 3^\circ + \dots + \operatorname{tg}^2 87^\circ + \operatorname{tg}^2 89^\circ = 4005$.

Solução

Lema: $\cos 90^\circ \alpha = \cos^{90} \alpha - C_{90,2} \cos^{88} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + C_{90,4} \cos^{86} \alpha \cdot \operatorname{sen}^4 \alpha - C_{90,6} \cos^{84} \alpha \cdot \operatorname{sen}^6 \alpha + C_{90,8} \cos^{82} \alpha \cdot \operatorname{sen}^8 \alpha + \dots + C_{90,88} \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^{88} \alpha - C_{90,90} \operatorname{sen}^{90} \alpha$.

Prova:

Sabemos que $(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^{90} = \cos 90\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 90\alpha$.

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^{90} &= \\ &= (\cos^{90} \alpha - C_{90,2} \cos^{88} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + C_{90,4} \cos^{86} \alpha \cdot \operatorname{sen}^4 \alpha - C_{90,6} \cos^{84} \alpha \cdot \operatorname{sen}^6 \alpha + \\ &+ C_{90,8} \cos^{82} \alpha \cdot \operatorname{sen}^8 \alpha + \dots + C_{90,88} \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^{88} \alpha - C_{90,90} \operatorname{sen}^{90} \alpha) + \\ &+ i \cdot (C_{90,1} \cos^{89} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - C_{90,3} \cos^{87} \alpha \cdot \operatorname{sen}^3 \alpha + C_{90,5} \cos^{85} \alpha \cdot \operatorname{sen}^5 \alpha - \\ &- C_{90,7} \cos^{83} \alpha \cdot \operatorname{sen}^7 \alpha + \dots + C_{90,88} \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^{88} \alpha - C_{90,90} \operatorname{sen}^{90} \alpha). \end{aligned}$$

Em seguida igualemos as partes reais e as imaginárias. Teremos:

$$\begin{aligned} \cos 90^\circ \alpha &= \cos^{90} \alpha - C_{90,2} \cos^{88} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + C_{90,4} \cos^{86} \alpha \cdot \operatorname{sen}^4 \alpha - C_{90,6} \cos^{84} \alpha \cdot \operatorname{sen}^6 \alpha + C_{90,8} \cos^{82} \alpha \cdot \operatorname{sen}^8 \alpha + \dots + \\ &+ C_{90,88} \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^{88} \alpha - C_{90,90} \operatorname{sen}^{90} \alpha \text{ e} \\ \operatorname{sen} 90^\circ \alpha &= C_{90,1} \cos^{89} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - C_{90,3} \cos^{87} \alpha \cdot \operatorname{sen}^3 \alpha + C_{90,5} \cos^{85} \alpha \cdot \operatorname{sen}^5 \alpha - \\ &- C_{90,7} \cos^{83} \alpha \cdot \operatorname{sen}^7 \alpha + \dots \end{aligned}$$

Com isso, provamos o lema.

Agora vamos ao nosso problema:

Note que a equação $\cos 90\alpha = 0$, tem como raízes $\cos 1^\circ, \cos 3^\circ, \dots, \cos 87^\circ, \cos 89^\circ, \cos 91^\circ, \dots, \cos 189^\circ$.

Pela fórmula do lema, temos que:

$$\begin{aligned}\cos 90\alpha &= \cos^{90} \alpha - C_{90,2} \cos^{88} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + C_{90,4} \cos^{86} \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \\ &- C_{90,6} \cos^{84} \alpha \cdot \sin^6 \alpha + C_{90,8} \cos^{82} \alpha \cdot \sin^8 \alpha + \dots + C_{90,88} \cos^2 \alpha \cdot \sin^{88} \alpha - \\ &- C_{90,90} \sin^{90} \alpha.\end{aligned}$$

Dividindo tudo por $\cos^{90} \alpha$ e fazendo $\operatorname{tg} \alpha = u$, temos que:

$$1 - C_{90,2} u^2 + C_{90,4} u^4 - C_{90,6} u^6 + C_{90,8} u^8 + \dots + C_{90,88} u^{88} - u^{90}.$$

Fazendo $u^2 = t$, temos:

$$1 - C_{90,2} t + C_{90,4} t^2 - C_{90,6} t^3 + C_{90,8} t^4 + \dots + C_{90,88} t^{44} - t^{45}.$$

Note que $\cos 91^\circ = -\cos 89^\circ$, $\cos 93^\circ = -\cos 87^\circ$, ..., $\cos 187^\circ = -\cos 3^\circ$, $\cos 189^\circ = -\cos 1^\circ$;

portanto as raízes da equação

$$1 - C_{90,2} t + C_{90,4} t^2 - C_{90,6} t^3 + C_{90,8} t^4 + \dots + C_{90,88} t^{44} - t^{45}$$

são $\operatorname{tg}^2 1^\circ$, $\operatorname{tg}^2 3^\circ$, ..., $\operatorname{tg}^2 87^\circ$, $\operatorname{tg}^2 89^\circ$. Usando as relações de Girard, temos que

$$\operatorname{tg}^2 1^\circ + \operatorname{tg}^2 3^\circ + \dots + \operatorname{tg}^2 87^\circ + \operatorname{tg}^2 89^\circ = \frac{C_{90,88}}{1} = 4005.$$

Parte III

Apêndices

- 5. Congruência / Resumo das propriedades**
- 6. Congruência / Resumo teórico**
- 7. Fórmulas Trigonométricas**

Apêndice 1

Congruência

Definição: Sejam a , b e m números inteiros, com $m > 0$. Dizemos que a é congruente a b módulo m se $m \mid a - b$; em outras palavras, se existe um inteiro k tal que $m \cdot k = a - b$.

Notação: Se a é congruente a b módulo m , escrevemos: $a \equiv b \pmod{m}$

Exemplos:

- i) $10 \equiv 2 \pmod{4}$, pois $4 \times 2 = 10 - 2$
- ii) $18 \equiv 3 \pmod{5}$, pois $5 \times 3 = 18 - 3$
- iii) $70 \equiv 40 \pmod{6}$, pois $6 \times 5 = 70 - 40$

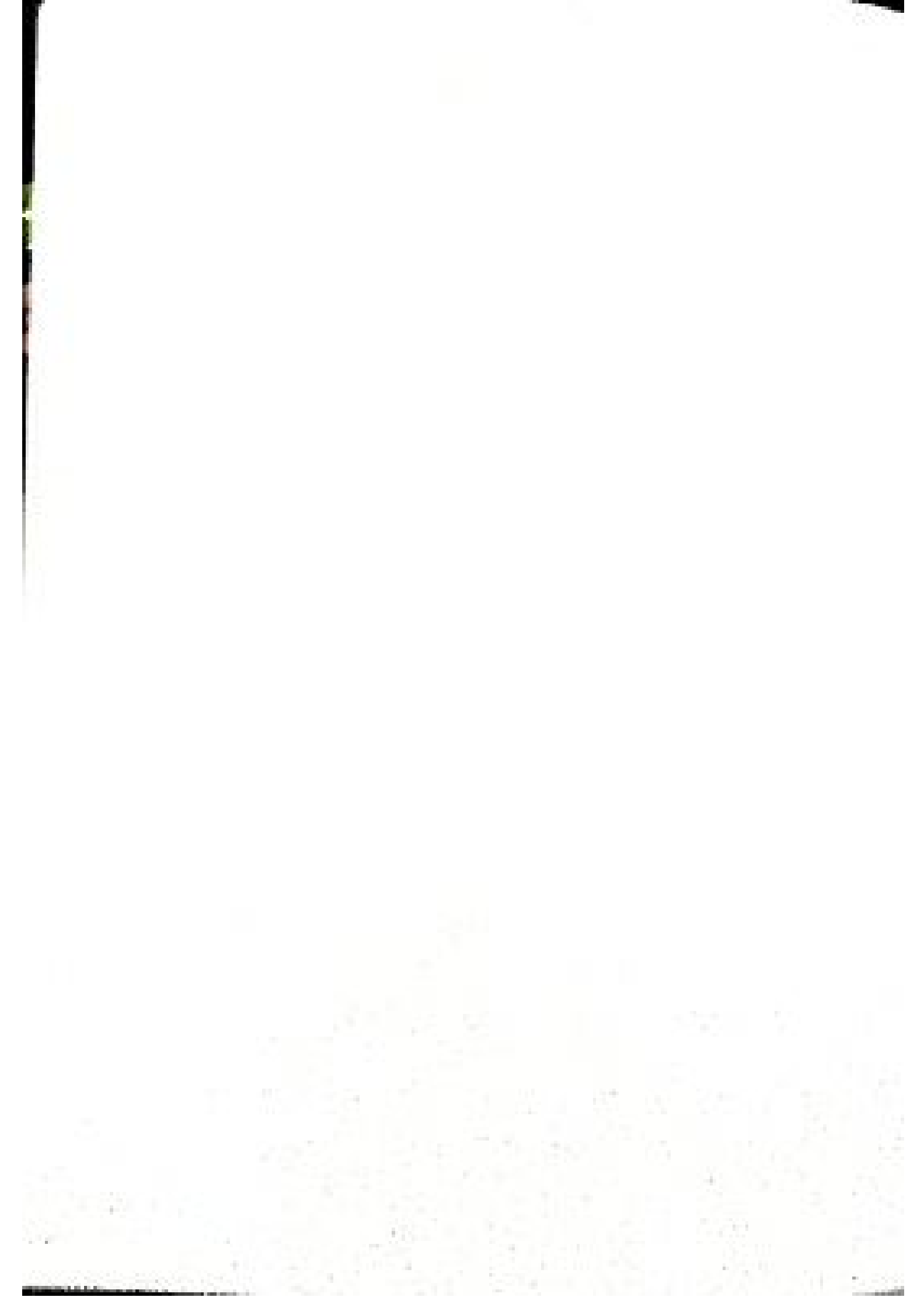
Propriedades:

Sejam a , b , c , d , m e n números inteiros, então valem as seguintes propriedades:

- I) $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$
- II) $a \equiv b \pmod{m}$ e $a \equiv c \pmod{m} \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}$
- III) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- IV) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{m}$
- V) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$
- VI) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$
- VII) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{m}$, para todo p natural e $p \geq 1$.

Teorema de Fermat: Se $p > 1$ é um número primo que não divide a , então:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$



Apêndice 2

Filipe Rodrigues de S. Moreira
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Congruências Lineares

1 – INTRODUÇÃO

A idéia de se estudar congruências lineares pode vir a facilitar (e muito) a vida de um estudante, na hora de resolver questões de Teoria dos Números e até Polinômios. Esse assunto merece uma atenção especial, pois em geral os livros que estão no mercado, mostram do que se trata, porém vão logo para uma abordagem mais abrangente e acabam saindo do foco de um aluno que não se interessa pelo assunto como estudo puro e sim está apenas buscando, alternativamente, outra ferramenta para resolver questões de vestibulares mais rebuscados como IME e ITA. Esse artigo tem por objetivo atender a necessidade de bons alunos que não se interessam por Olimpíadas de Matemática (puro e simplesmente), mas querem descobrir novos métodos para tornar simples questões difíceis, que à priori exigiriam muito raciocínio e genialidade.

2 – DEFINIÇÃO DA PALAVRA E NOTAÇÃO

Dizemos que dois números inteiros são congruentes, em relação a algum outro, quando deixam o mesmo resto na divisão por esse outro, ou seja, diz-se que "a é congruente a b módulo m" quando tanto "a" quanto "b" deixam o mesmo resto na divisão por "m".

Veja a notação usual: $a \equiv b \pmod{m}$. Agora vamos aplicar:

$12 \equiv 2 \pmod{5}$, pois 2 é o resto da divisão de 12 por 5.

$12 \equiv 7 \pmod{5}$, pois 7 e 12 deixam o mesmo resto na divisão por 5.

$24 \equiv 3 \pmod{7}$, pois 3 é o resto da divisão de 24 por 7.

$28 \equiv 1 \pmod{9}$, pois 1 é o resto da divisão de 28 por 9.

Veja esse último exemplo... sabe-se que $28 = 9 \cdot 3 + 1$, mas por que não escrevermos que $28 = 9 \cdot 4 - 8$? Sendo assim, o resto da divisão de 28 por 9 poderia ser "-8". De fato, na divisão Euclidiana, isso não é permitido, pois se trata do menor resto positivo, porém, podemos trabalhar com restos negativos na teoria de congruência, ou seja, é possível escrever que $28 \equiv -8 \pmod{9}$.

Acredite! isso vai tornar a sua vida muito mais tranqüila na hora de resolver questões de teoria dos números.

3 – ALGUMAS PROPRIEDADES DE CONGRUÊNCIAS:

P₁) Sejam dois números inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$ e outros dois inteiros tais que $c \equiv d \pmod{m}$. Assim, $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.

Prova:

Se $a \equiv b \pmod{m}$ então $a = k.m + b$ (com $k \in \mathbb{Z}$) e se $c \equiv d \pmod{m}$ então $c = t.m + d$ (com $t \in \mathbb{Z}$). Logo temos que $(a \pm c) = (k \pm t).m + (b \pm d)$, assim $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.

P₂) Sejam dois números inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$ e outros dois inteiros tais que $c \equiv d \pmod{m}$. Assim, $a.c \equiv b.d \pmod{m}$.

Prova:

Se $a \equiv b \pmod{m}$ então $a = k.m + b$ (com $k \in \mathbb{Z}$) e se $c \equiv d \pmod{m}$ então $c = t.m + d$ (com $t \in \mathbb{Z}$). Logo temos que:

$$a.c = \overbrace{k.t.m^2 + k.m.d + t.m.b}^{\text{múltiplo de } m} + b.d$$

Assim, concluímos que $a.c \equiv b.d \pmod{m}$.

P₃) Sejam dois números inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$. Logo sendo r outro número inteiro tem-se que $a \pm r \equiv b \pm r \pmod{m}$.

Prova:

Se $a \equiv b \pmod{m}$ então $a = k.m + b$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo temos que $(a \pm r) = k.m + (b \pm r)$, assim $a \pm r \equiv b \pm r \pmod{m}$.

P₄) Sejam dois números inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$. Logo sendo r outro número inteiro tem-se que $a.r \equiv b.r \pmod{m}$.

Prova:

Se $a \equiv b \pmod{m}$ então $a = k.m + b$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo temos que $a.r = k.m.r + b.r$, logo $a.r \equiv b.r \pmod{m}$.

P₅) Sejam dois números inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$. Seja n um número natural logo, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Prova : Demonstre essa propriedade a partir da propriedade P₂ fazendo uso do Princípio da Indução finita.

Essas propriedades vão ajudar muito o estudante na resolução de questões mais elaboradas, pois elas permitem substituir números grandes pelos seus restos na divisão em questão.

Suponha que você deseje achar o resto da divisão de 2006^{2006} por 5.

Pela propriedade P₅, $2006^{2006} \equiv 1^{2006} = 1 \pmod{5}$, logo o resto da divisão de 2006^{2006} por 5 é 1.

A seguir, mostrarei uma série de exemplos resolvidos que ajudarão o leitor a perceber como essa ferramenta Congruência é poderosa.

Exemplo Resolvido 1

Calcular o resto da divisão de $(2006^{2006} + 2004^{2004})^{2005}$ por 5.

Solução:

$$(2006^{2006} + 2004^{2004})^{2005} \equiv (1^{2006} + (-1)^{2004})^{2005} \equiv 2^{2005}.$$

Como $16 = 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, podemos escrever:

$$2^{2005} = (2^4)^{501} \cdot 2 \equiv (1)^{501} \cdot 2 = 2$$

Logo $(2006^{2006} + 2004^{2004})^{2005}$ deixa resto 2 na divisão por 5.

Veja que a vantagem dessa teoria é a possibilidade da substituição das bases pelos seus restos na divisão desejada. Nesse caso, 2006 foi substituído por 1 e 2004 o foi por (-1) que são seus respectivos restos na divisão por 5.

Exemplo Resolvido 2

Calcular o resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 11^{131} + 13^{131}$ por 9.

Solução:

$$5^{131} + 7^{131} + 11^{131} + 13^{131} \equiv (-4)^{131} + (-2)^{131} + (2)^{131} + (4)^{131} = 0 \pmod{9}$$

Assim, o resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 11^{131} + 13^{131}$ por 9 vale 0.

Exemplo Resolvido 3

Calcular o resto da divisão de N por 5, onde N é dado por:

$$N = 1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + \dots + 2006^{2007} + 2007^{2007}$$

Solução:

Vamos resolver essa questão por partes. Tome os 5 primeiros termos.

$$\begin{aligned} 1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + \overbrace{5^{2007}}^{\equiv 0} &\equiv \\ \equiv 1^{2007} + 2^{2007} + (-2)^{2007} + (-1)^{2007} &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

Esse raciocínio se repete para cada grupo de cinco números consecutivos, contando a partir dos números da forma $5k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, assim, todas as parcelas até 2005^{2007} vão se anular na congruência módulo 5. Faltam então as duas últimas parcelas. Logo:

$$N \equiv 2006^{2007} + 2007^{2007} \equiv 1 + 2^{2007} \equiv 1 + 2^3 \cdot \overbrace{(2^4)^{501}}^{\equiv 1} \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}$$

Exemplo Resolvido 4

Determinar qual é o algarismo das unidades na representação decimal do número $N = (2006^{2007} + 2005 \cdot 2007^{2007})^{2007}$.

Solução:

Determinar o algarismo das unidades de um número qualquer é o mesmo que determinar o resto na divisão por 10, pois qualquer número inteiro N pode ser escrito sob a forma $N = 10k + b$, com k e b inteiros. Logo, fazendo congruência módulo 10:

$$\begin{aligned} N &= (2006^{2007} + 2005 \cdot 2007^{2007})^{2007} \equiv (6^{2007} + 5 \cdot \overbrace{(7^2)^{1003}}^{\equiv -1} \cdot 7)^{2007} \equiv \\ &\equiv (6^{2007} - 35)^{2007} \equiv (6^{2007} - 5)^{2007} \end{aligned}$$

Vamos estudar as potências de 6 na divisão por 10.

$$6^0 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$6^1 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^2 \equiv 36 \equiv 6 \pmod{10} \text{ começa a repetir}$$

Logo qualquer potência ($n > 0$) de 6 deixa resto 6 na divisão por 10.

$$\text{Assim, } N \equiv (6^{2007} - 5)^{2007} \equiv (6 - 5)^{2007} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Logo, o algarismo das unidades de N é 1.

Exemplo Resolvido 5

Determinar qual é o algarismo das unidades na representação decimal do número N dado por

$$N = (22222^{55555} + 55555^{22222})^{33333} + (33333^{77777} + 77777^{33333})^{44444}.$$

Solução:

Estudaremos a congruência módulo 10. Vamos substituir todas as grandes bases pelos seus restos na divisão por 10, ou seja, substituiremos 22222 por 2, 55555 por 5, 33333 por 3 e 77777 por 7. Veja:

$$\begin{aligned} N &\equiv ((\overbrace{2^4}^{\equiv 1})^{13888} \cdot 2^3 + \overbrace{5^{22222}}^{\equiv 5})^{33333} + ((\overbrace{3^2}^{\equiv -1})^{38888} \cdot 3 + (\overbrace{7^2}^{\equiv -1})^{16666} \cdot 7)^{44444} \equiv \\ &\equiv (8 + 5)^{33333} + (3 + 7)^{44444} \equiv (3)^{33333} + (\overbrace{10}^{\equiv 0})^{44444} \equiv 3^{33333} \equiv (\overbrace{3^2}^{\equiv -1})^{16666} \cdot 3 \equiv 3 \end{aligned}$$

Logo o algarismo das unidades de N é 3.

Exemplo Resolvido 6

O número 123456789(10)(11)(12)(13)(14) está escrito na base 15. Qual o resto da divisão desse número por 7.

Solução:

Se 123456789(10)(11)(12)(13)(14) está na base 15, então podemos reescrevê-lo na sua composição de base 15. Veja:

$$N = 1 \cdot 15^{13} + 2 \cdot 15^{12} + 3 \cdot 15^{11} + \dots + (12) \cdot 15^2 + (13) \cdot 15 + (14)$$

Mas 15 deixa resto 1 na divisão por 7, então:

$$N \equiv 1 \cdot 1^{13} + 2 \cdot 1^{12} + 3 \cdot 1^{11} + \dots + (13) \cdot 1 + (14) = 1 + 2 + \dots + 13 + 14 = 105 \equiv 0 \pmod{7}$$

Repare que quando o número está na base 15, o critério de divisibilidade por 7 é dado pela soma dos algarismos.

4 – TEOREMA ÚTIL: TEOREMA DE FERMAT

Sejam a um número natural e p um número primo tais que $\text{mdc}(a, p) = 1$. Com essas condições pode-se afirmar que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Prova: Tomemos o conjunto $A = \{a, 2a, 3a, 4a, \dots, (p-1)a\}$.

Lema: Todos os elementos de A são incongruentes entre si (módulo p), dois a dois.

Provando o lema:

Suponha que existam dois elementos distintos de A tais que sejam congruentes entre si na divisão por p . Logo $ka - ta \equiv 0 \pmod{p}$, o que implica que $k - t \equiv 0 \pmod{p}$, pois se tem que $\text{mdc}(a, p) = 1$.

Assim, $k \equiv t \pmod{p}$, mas como são menores que p , temos que $k = t$, mas isso é absurdo, pois por hipótese $k \neq t$.

Logo, como A tem $(p - 1)$ elementos e todos são incongruentes entre si na divisão por p , temos que em A existem todos os possíveis restos (diferentes de zero) na divisão por p . Pela propriedade P_2 , a multiplicação de todos os elementos de A é congruente à multiplicação de todos os respectivos restos na congruência módulo p .

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot 4a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

$$a^{p-1}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

como $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)$ é primo com p , podemos cancelar os termos comuns de ambos os lados da congruência e assim: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Corolário: Se a é um número natural e p é um número primo, então:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Exemplo Resolvido 7

(IME) Prove que os inteiros k e k^5 têm o mesmo algarismo das unidades.

Solução:

Veja que qualquer número pode ser escrito na forma $x = 10t + b$. Se k e k^5 têm o mesmo algarismo das unidades, então se escrevem nas formas $k = 10t + b$ e $k^5 = 10m + b$, logo a diferença entre k e k^5 é da forma $k^5 - k = 10(m - t)$, portanto, múltiplo de 10.

Assim sendo, provar que ambos tem o mesmo algarismo das unidades é equivalente a provar que a diferença $k^5 - k$ é múltiplo de 10. Basta então provar que essa diferença é múltiplo de 2 e de 5 simultaneamente.

$$\text{Fatorando: } k^5 - k = k \cdot (k^4 - 1) = k(k^2 - 1)(k^2 + 1) = (k - 1) \cdot k \cdot (k + 1) \cdot (k^2 + 1)$$

Na fatoração aparece o produto de dois inteiros consecutivos $k \cdot (k+1)$, logo um deles é par e assim o produto é par, portanto, múltiplo de 2.

Veja que 5 é primo e k é inteiro, logo pelo corolário do teorema de Fermat, $k^5 \equiv k \pmod{5}$, logo $k^5 - k \equiv 0 \pmod{5}$, portanto, essa diferença é múltiplo de 5.

Assim, como a diferença $k^5 - k$ é par e é múltiplo de 5, então ela é múltipla de 10.

c.q.d.

5 – APLICAÇÃO DE CONGRUÊNCIAS A POLINÔMIOS

Assim como a idéia de se associar a divisão euclidiana à notação em módulo é útil com números inteiros, podemos também utilizá-la para polinômios, veja alguns exemplos:

Exemplo 1: $P(x) = x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{x^3 + x^2 + x + 1}$, pois fatorando $x^4 - 1$, tem-se que $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$, ou seja, $x^4 - 1$ deixa resto zero na divisão por $x^3 + x^2 + x + 1$.

Exemplo 2: $P(x) = x^4 + x - 1 \equiv x \pmod{x^2 - 1}$, pois dividindo $x^4 + x - 1$ por $x^2 - 1$ tem-se resto x .

Exemplo Resolvido 8

Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^5 + x + 1$ por $x^3 - 1$.

Solução:

Temos que $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{x^3 - 1}$, logo, somando 1 em ambos os lados da congruência, conclui-se que $x^3 \equiv 1 \pmod{x^3 - 1}$.

$$P(x) = x^5 + x + 1 \equiv x^2 \cdot \overbrace{(x^3)}^{\equiv 1} + x + 1 \equiv x^2 + x + 1 \pmod{x^3 - 1}.$$

Logo o resto da divisão de $P(x)$ por $x^3 - 1$ é $x^2 + x + 1$.

Exemplo Resolvido 9

Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^{10} + 3x^8 + x^7 - x^3 + x^2 + 2x - 1$ por $x^3 + x$.

Solução:

Temos que $x^3 + x \equiv 0 \pmod{x^3 + x}$, logo, somando $(-x)$ em ambos os lados da congruência chega-se que $x^3 \equiv -x \pmod{x^3 - 1}$.

$$x^{10} + 3x^8 + x^7 - x^3 + x^2 + 2x - 1 \equiv$$

$$\equiv x \cdot (\overbrace{x^3}^{\equiv -x})^3 + 3x^2 (\overbrace{x^3}^{\equiv -x})^2 + x \cdot (\overbrace{x^3}^{\equiv -x})^2 - (\overbrace{x^3}^{\equiv -x}) + x^2 + 2x - 1 \equiv$$

$$\equiv x \cdot (-x)^3 + 3x^2 (-x)^2 + x \cdot (-x)^2 - (-x) + x^2 + 2x - 1 \equiv$$

$$\equiv -x^4 - 3x^4 - x^3 + x + x^2 + 2x - 1 \equiv$$

$$\equiv -4x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 1 \equiv -4x \cdot (x^3) - (x^3) + x^2 + 3x - 1 \equiv$$

$$-4x \cdot (-x) - (-x) + x^2 + 3x - 1 \equiv 4x^2 + x + x^2 + 3x - 1 \equiv 5x^2 + 4x - 1.$$

Logo o resto da divisão de $P(x)$ por $x^3 + x$ é $5x^2 + 4x - 1 \pmod{x^3 - 1}$.

Obs.: Veja que a vantagem da congruência é poder substituir as potências grandes de x por outros termos que são exatamente o resto da divisão dessa potência pelo módulo em questão.

Exemplo Resolvido 10

(IME) Provar que $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{111} + 1$ é divisível pelo polinômio $D(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x^1 + 1$.

Solução:

Sabemos que $x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)$, logo escrevendo na notação de módulo temos que:

$$x^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}$$

ou ainda podemos escrever que:

$$x^{10} \equiv 1 \pmod{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}.$$

Assim, podemos substituir todas as potências de x^{10} , no polinômio original pelo número "1".

$$P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{111} + 1 =$$

$$= x^9 \cdot (\overbrace{x^{10}}^{\equiv 1})^{99} + x^8 \cdot (\overbrace{x^{10}}^{\equiv 1})^{88} + \dots + x \cdot (\overbrace{x^{10}}^{\equiv 1})^{11} + 1 \equiv$$

$$\equiv x^9 + x^8 + \dots + x + 1 \equiv 0 \pmod{x^9 + x^8 + \dots + x + 1}.$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $D(x)$.

6 – APLICAÇÃO DE CONGRUÊNCIA EM FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Assim como essa ferramenta poderosa pode ser útil para determinar o resto da divisão entre polinômios, podemos utilizá-la para determinar fatores de alguns polinômios que se quer obter a fatoração.

Veja a fatoração: $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$. Com base nesse resultado chega-se que $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}$, logo, somando 1 em cada membro da congruência, concluímos que:

$$x^n \equiv 1 \pmod{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1}$$

Essa congruência pode ser muito útil em muitos problemas de fatoração, veja dois exemplos a seguir:

Exemplo Resolvido 11

Fatorar $q(x) = x^5 + x + 1$.

Solução:

Vamos estudar a congruência de $q(x) = x^5 + x + 1$ no módulo $x^3 - 1$: $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{x^3 - 1}$, logo se chega que $x^3 \equiv 1 \pmod{x^3 - 1}$.

Com isso $q(x) = x^5 + x + 1 \equiv \overbrace{x^3}^{\equiv 1} \cdot x^2 + x + 1 \equiv x^2 + x + 1 \pmod{x^3 - 1}$, mas como $x^2 + x + 1$ é fator de $x^3 - 1$, concluímos que se tivéssemos feito congruência módulo $x^2 + x + 1$, a congruência teria dado zero, assim, $x^2 + x + 1$ é um fator de $q(x)$.

Fazendo então a divisão longa entre os polinômios $q(x)$ e $x^2 + x + 1$, chega-se que o resto é zero e o produto entre o divisor e o quociente já é a forma fatorada desse polinômio $q(x) = x^5 + x + 1$. Logo:

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

Exemplo Resolvido 12

Fatorar $q(x) = x^7 + x^5 + x^2 + 1$.

Solução:

Vamos estudar a congruência de $q(x) = x^7 + x^5 + x^2 + 1$ no módulo $x^4 - 1$:
 $x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{x^4 - 1}$, logo se chega que $x^4 \equiv 1 \pmod{x^4 - 1}$.

Com isso:

$$q(x) = x^7 + x^5 + x^2 + 1 \equiv \overbrace{x^4}^{\equiv 1} x^3 + \overbrace{x^4}^{\equiv 1} x + x^2 + 1 \equiv x^3 + x + x^2 + 1 \pmod{x^4 - 1},$$

mas como $x^3 + x + x^2 + 1$ é fator de $x^4 - 1$, concluímos que se tivéssemos feito congruência módulo $x^3 + x + x^2 + 1$, a congruência teria dado zero, assim, $x^3 + x + x^2 + 1$ é um fator de $q(x)$.

Fazendo então a divisão longa entre os polinômios $q(x)$ e $x^3 + x + x^2 + 1$, chega-se que o resto é zero e o produto entre o divisor e o quociente já é a forma fatorada desse polinômio $q(x) = x^7 + x^5 + x^2 + 1$.

Logo: $x^7 + x^5 + x^2 + 1 = (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

Apêndice 3

Fórmulas Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$$

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{(1 - \operatorname{tg}^2 a)}$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = -2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\operatorname{sen} 3a = -4 \cdot \operatorname{sen}^3 a + 3 \operatorname{sen} a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

Bibliografia

- [1] ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming. **101 Problems in Algebra from the Training of the USA IMO Team**. Camberra (Australia): AMT Publishing, 2001.
- [2] DOOB, Michael., **The Canadian Mathematical Olympiad 1969 - 1993**, Ottawa ON, University of Toronto Press, 1993.
- [3] ENGEL, Arthur., **Problems – Solving Strategies, Problems Books in Mathematics**, New York, Springer-Verlag, 1998.
- [4] LOZANSKY, Edward.; ROUSSEAU, Cecil. **Winning Solutions**, New York, Springer-Verlag, 1996.
- [5] DOMINGUES, Hygino. **Fundamentos de Aritmética**, São Paulo, Atual Editora, 1991
- [6] ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorica., **360 Problems From Mathematical contests**, Zalau, GIL Publishing House, 2003.
- [7] LARSON, Loren., **Problem – Solving Trough Problems**, New York, Springer-Verlag, 1983.
- [8] Revista Eureka: Olimpíada Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, Maio de 1998 a Agosto de 2009.
- [9] KEDLAYA, Kiran; POONEN, Bjorn.; VAKIL, Ravi, **The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985 – 2000**, Washington D.C., The Mathematical Association of America, 2002.
- [10] SAVCHEV, Svetoslav.; ANDREESCU, Titu. **Mathematical Miniatures**, Washington D.C., Mathematical Association of America, 2002
- [11] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan., **Mathematical Olympiad Challenges**, Boston, Birkhauser, 2000.
- [12] ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin., **An Introduction to Diophantine Equations**, Zalau (Romênia), GIL Publishing House, 2002.
- [13] ANDREESCU, Titu; ENESCU, Bogdan., **Mathematical Olympiad Treasures**, Boston Birkhauser, 2003.
- [14] ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming., **103 Trigonometry Problems from the Training of the USA IMO Team**, Boston, Birkhauser, 2004.
- [15] ZEITZ, Paul., **The Art and Craft of Problems Solving**, John Wiley & Sons, 2007.
- [16] CARMO, Manfredo Perdigão do, et.al. **Trigonometria e Números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1992

- [17] LIDSKI, V. B. y otros, **Problemas de matemáticas Elementales**, Moscou, Editora Mir, Moscow, 1972 (traduzido para o Espanhol).
- [18] LITIVINENKO, V; MORDIKOVICH, A., **Solving Problems in Algebra and Trigonometry**, Moscou, Editora Mir Moscow, 1987.
- [19] LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. V. 1. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2006.
- [20] LIMA, Elon Lages; Pinto, Carvalho, Paulo César Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. V. 3. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2001.
- [21] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. **Putnam and Beyond**. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [22] SHKLARSKY, D.O.; CHENTZOV N.N.; YAGLOM I.M., **The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics**, New York, Dover Publications, 1993
- [23] HOLANDA, Bruno; AUGUSTO, Carlos; BARBOSA, Samuel; LIMA, Yuri, **Treinamento do Cone Sul 2007**, Fortaleza, Editora Realce, 2007.
- [24] BEE, Xiong; PENG, Lee. **Mathematical Olympiad in China: Problems and Solutions**, Shangai (China), East China Normal University Press and World Scientific Publishing, 2007.
- [25] ANTAR, Aref; SAMPAIO, José Luis; LAPA, Nilton; CAVALCANTTE, Sidney, **Trigonometria: Noções de Matemática**, São Paulo, Editora Moderna, 1979

Lista de Siglas e Abreviações

- KRMO – Karnataka Regional Mathematical Olympiad
- IMO – International Mathematical Olympiad
- MOCP – Mathematical Olympiads Correspondence Program
- H.I – Hipótese de Indução

Sites Acessados:

- [1] Matemática Nick Puzzles.

Disponível em: <<http://www.qbyte.org/puzzles/>>.

Acesso em: 20/08/2009

- [2] Olimpíada Brasileira de Matemática.

Disponível em: <<http://www.obm.org.br>>.

Acesso em: 20/08/2009

- [3] Olimpíada Argentina de Matemática.

Disponível em: <<http://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm>>.

Acesso em: 17/08/2009

- [4] Olimpíada Portuguesa de Matemática.

Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~opm/>>.

Acesso em: 10/08/2009

- [5] Olimpíada Espanhola de Matemática.

Disponível em: <<http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimprab.htm>>.

Acesso em: 10/02/2010

- [6] Portal Mathlinks.

Disponível em: <<http://www.mathlinks.ro/>>.

Acesso em: 10/08/2009

- [7] Olimpíada de Matemática da África do Sul.

Disponível em: <<http://www.samf.ac.za/samo/questions.html>>.

Acesso em: 15/07/2009

- [8] Notas de Aula de Kin Yin Li.

Disponível em: <http://www.math.ust.hk/~makyli/190_2003Fa/lect-notes_03fa.pdf>.

Acesso em: 15/08/2009

- [9] The imocompendium.

Disponível em: <<http://www.imomath.com/index.php?options=oth|other&p=0>>.

Acesso em: 10/08/2009

- [10] Treinamento do Cone Sul.

Disponível em: < <http://treinamentococonesul.blogspot.com/> >,
Acesso em: 12/08/2009

[11] Sociedade Canadense de Matemática.

Disponível em: < <http://www.cms.math.ca/Olympiads/> >,
Acesso em: 20/07/2009

[12] Olimpíada Indiana de Matemática.

Disponível em: < <http://www.isibang.ac.in/~statmath/krmo-08.html> >,
Acesso em 10/07/2009

[13] Olimpíada de Matemática da Estônia.

Disponível em: < <http://www.math.olympiadid.ut.ee/eng/html/index.php> >,
Acesso em: 21/08/2009

[14] Olimpíadas de matemática do Chile. Disponível em:

< <http://www.olimpiadadematematica.cl/> > ,

Acesso em 20 /08/2009

[15] Olimpíadas de matemática do Uruguai.

Disponível em: < <http://www.compartida.org/> > ,

Acesso em 22 /08/2009

[16] Olimpíada de Matemática da Hong Kong.

Disponível em: < <http://www.ied.edu.hk/math/7.htm> > ,

Acesso em: 25/08/2009

[17] Emanuel Carneiro Home Page.

Disponível em: < <http://www.ma.utexas.edu/users/ecarneiro> > ,

Acesso em 20/08/2009

[18] Projeto Rumoaota.

Disponível em: < <http://www.rumoaota.com/site/> > ,

Acesso: 12/08/2009

A Editora VestSeller tem o prazer de lançar mais uma obra prima da Matemática para o segmento de preparação para escolas militares e Olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais: a presente obra Problemas Seleccionados de Matemática IME ITA e Olimpíadas, do professor Marcílio Miranda.

Esse livro apresenta uma ampla gama de problemas de níveis intermediário e avançado das mais variadas olimpíadas de Matemática de todo o mundo, assim como problemas propostos para treinamento, todos eles integralmente resolvidos ao final do livro, tendo alguns deles, mais de uma solução.

Os estudantes que se preparam para IME ITA e Olimpíadas têm, nesse livro, uma ferramenta poderosa que permite ao leitor obter um grande salto de conhecimento num curto intervalo de tempo.

O autor, Marcílio Miranda, professor do IFRN – RN (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia), selecionou e reuniu um conjunto de problemas muito interessantes e variados, em especial aqueles relativos a números inteiros, equações com números inteiros, congruência linear. Conta adicionalmente com muitas questões de álgebra e trigonometria, problemas envolvendo séries telescópicas, expressões trigonométricas, equações algébricas, relações de Girard, enfim, um livro indispensável para todos os professores e estudantes desse segmento.

A VestSeller, juntamente com o autor, tem a certeza de, mais uma vez, estar contribuindo para a educação no Brasil, enriquecendo o mercado editorial com mais uma obra prima em Matemática de grande valor para estudantes e professores.



www.vestseller.com.br

